

## 1 – I numeri indici

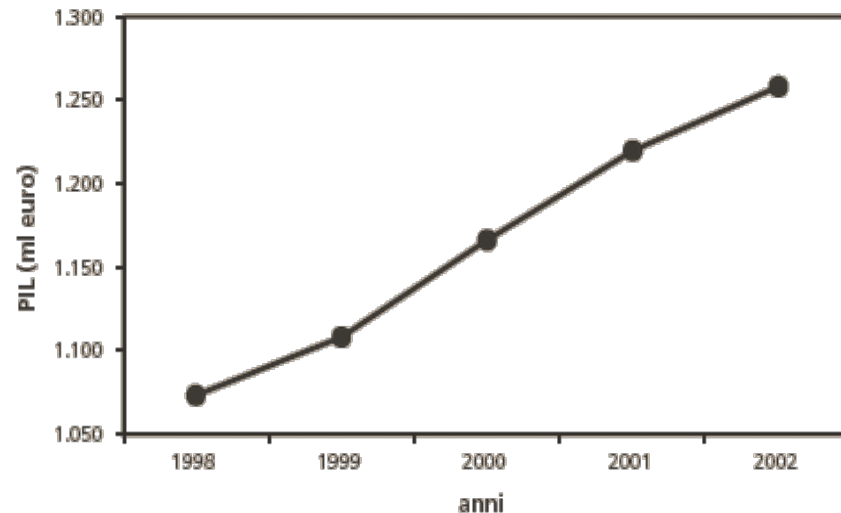
## Unità n° 06

I **rapporti** o **numeri indici** pongono a confronto le intensità di un determinato carattere in tempi o luoghi differenti, pertanto sono istituiti tra i termini di una serie temporale (o territoriale)

Hanno lo scopo di fornire la variazione relativa di un fenomeno e sono numeri puri, non dipendono cioè dall'unità di misura del fenomeno stesso

Si definisce **serie temporale** o **serie storica** una sequenza di osservazioni quantitative  $y_1, y_2, \dots, y_T$  relative ad un certo fenomeno  $Y$  (economico, sociale, ...) rilevate a scadenze regolari nel tempo

**ESEMPIO:** andamento del PIL ai prezzi di mercato in Italia dal 1998 al 2002



Una serie storica è una successione ordinata di numeri reali che misura un certo fenomeno nella sua evoluzione rispetto al tempo

**criterio** → **ordinamento temporale**

*il tempo ha una direzione quindi esiste una storia*

## 2 – Numeri indici semplici e composti

## Unità n° 06

A seconda che si consideri un unico fenomeno (combinazione di un certo numero di componenti elementari in situazioni diverse) o più fenomeni (combinazione di componenti non elementari rispetto ad una situazione di riferimento) si avranno rispettivamente **indici semplici** e **composti**

### **numeri indici semplici**

costituiscono rapporti percentuali fra due grandezze economiche omogenee misurate in tempi o luoghi diversi

### **numeri indici composti**

costituiscono indicatori delle variazioni relative di più fenomeni eterogenei, resi confrontabili dal riferimento a prezzi, quantità, ecc. Si ottengono come sintesi di numeri indici semplici



Potremmo parlare di un **approccio statistico** per i numeri semplici e di **approccio economico** per i numeri composti

### **ESEMPIO: Indici che si riferiscono ai consumi delle famiglie**

- ✓ Indice nazionale dei prezzi al consumo per l'intera collettività (NIC)
- ✓ Indice armonizzato dei prezzi al consumo per i paesi dell'Unione Europea (IPCA)
- ✓ Indice dei prezzi al consumo per le famiglie di operai e impiegati (FOI)

### 3 – Numeri indici semplici

### Unità n° 06

I numeri indici semplici (o elementari) sono rapporti che mettono a confronto due misure di un fenomeno semplice, concreto, unico

Supponiamo di considerare la serie temporale di un fenomeno H

$$H_0, H_1, H_2, \dots, H_{N-1}, H_N$$

con  $H_i > 0$  (per  $i=0,1,2,3,\dots,N$ ), dove ogni elemento è la misura ad un certo tempo (o luogo) di H: il rapporto fra due misure esprime il *numero indici elementare* ed è fornito dal quoziente

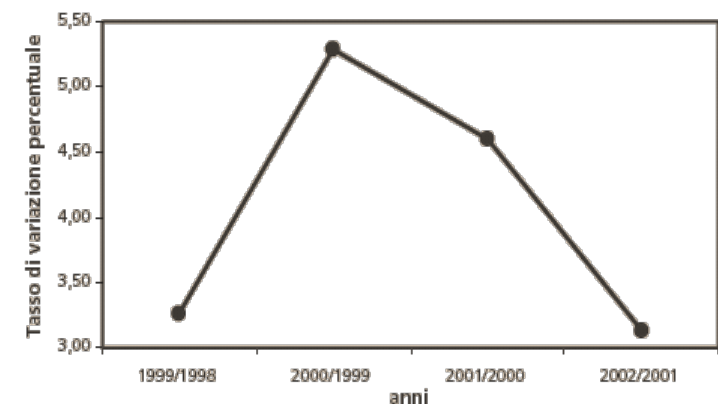
$$I(t, t + 1) = \frac{H_{t + 1}}{H_t} \times 100$$

dove  $H_t$  è la misura della grandezza al tempo t (o nel luogo t) e  $H_{t+1}$  è la misura al tempo (o nel luogo) t+1

La grandezza al denominatore è detta *Base o Origine* del numero indice

#### ESEMPIO

*tasso percentuale di variazione del PIL ai prezzi di mercato in Italia dal 1998 al 2002*



## 4 – Alcune considerazioni

## Unità n° 06

Che relazione c'è tra variazione relativa, tasso di variazione e numero indice?

In fondo sono tre modi diversi per valutare lo stesso aspetto: siamo interessati a studiare l'evoluzione nel tempo di un fenomeno e a quantificare questa evoluzione

Consideriamo il prezzo di un pacchetto di sigarette al tempo A e al tempo B e immaginiamo che il prezzo si modifichi da 3,00 € a 3,80 €: come è variata l'intensità del fenomeno nei due periodi?

**variazione relativa**

$$\frac{P_B}{P_A} = \frac{3,80}{3,00} \cong 1,27$$

**tasso di variazione**

$$1,27 - 1 = 0,27 \rightarrow 27\%$$

**numero indice**

$$1,27 \times 100 = 127$$

In qualsiasi modo rappresentiamo l'evoluzione del fenomeno abbiamo sempre lo stesso tipo di informazione: il nuovo prezzo è 1,27 volte quello rilevato in precedenza, cioè è cresciuto del 27%

## 5 – Rappresentazione grafica e interpretazione

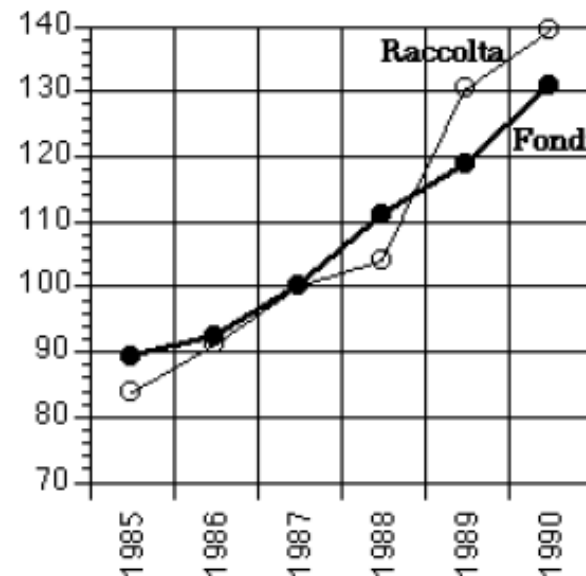
## Unità n° 06

Trattandosi di valori puri (rispetto alla scala), i numeri indici permettono di co-rappresentare valori espressi all'origine in unità di misura eterogenee

### ESEMPIO

*In tabella si riportano le serie storiche riguardanti la raccolta lorda (in miliardi di dollari) ed il numero di fondi monetari negli USA*

Anno	Raccolta	Fondi
1985	730.1	348
1986	792.3	360
1987	869.1	389
1988	903.4	432
1989	1134.6	463
1990	1211.8	509



Le due serie, numericamente diverse, coesistono in uno stesso grafico basato sui numeri indici

## 6 – Indici a base fissa e mobile

## Unità n° 06

Nel costruire i quozienti è determinante la scelta della base: possiamo infatti costruire numeri indici **a base fissa** e **a base mobile**

### a base fissa

esprime l'intensità o la frequenza di un fenomeno con riferimento ad un fissato periodo di tempo

$$I_{(0,1)} = \frac{H_1}{H_0} \quad I_{(0,2)} = \frac{H_2}{H_0} \quad I_{(0,3)} = \frac{H_3}{H_0} \quad \dots \quad I_{(0,N)} = \frac{H_N}{H_0}$$

### a base mobile

esprime l'intensità o la frequenza di un fenomeno con riferimento al periodo di tempo precedente

$$I_{(0,1)} = \frac{H_1}{H_0} \quad I_{(1,2)} = \frac{H_2}{H_1} \quad I_{(2,3)} = \frac{H_3}{H_2} \quad \dots \quad I_{(N-1,N)} = \frac{H_N}{H_{N-1}}$$

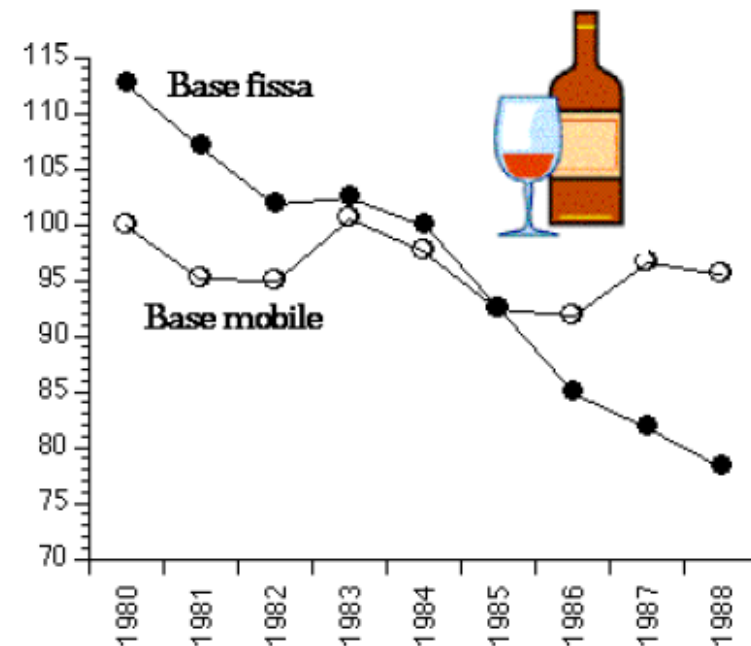
In quest'ultimo caso si parla di **concatenamento**

**7 – Esempio**

**Unità n° 06**

*I dati in tabella riguardano il consumo medio annuo di vino in Italia. Calcolare gli indici elementari a base fissa 1984=100 e gli indici a base mobile a partire dal 1980*

Anni	Vino (litri)	Base fissa '84	Base mobile
1980	90.6	112.55	100.00
1981	86.2	107.08	95.14
1982	81.9	101.74	95.01
1983	82.4	102.36	100.61
1984	80.5	100.00	97.69
1985	74.4	92.42	92.42
1986	68.3	84.84	91.80
1987	65.9	81.86	96.49
1988	63.0	78.26	95.60



L'indice a base fissa ha natura di **statica comparata** ed evidenzia un netto declino che non è invece apparente nell'indice a base mobile che ha natura **dinamica**:

- *l'indice a base fissa è più adatto a delineare evoluzioni di medio o lungo periodo*
- *l'indice a base mobile è adatto a evidenziare evoluzioni di breve termine e oscillazioni congiunturali*

## 8 – Proprietà dei numeri indice

## Unità n° 06

**Proprietà della Determinatezza:** un indice non deve annullarsi, tendere a infinito, o diventare indeterminato se si annulla un termine compreso nella formula

**Proprietà dell'identità:** se le due situazioni messe a confronto sono uguali, ossia di uguale intensità, allora il numero indice elementare assume valore 1

$$H_j = H_k \Rightarrow I_{(j, k)} = \frac{H_k}{H_j} \cdot 100 = 100$$

**Proprietà della Reversibilità delle basi:** data la successione dei numeri indici a base fissa, per ottenere la corrispondente successione a base mobile si divide ciascun indice per il precedente

$$I_{(t, t+1)} = I_{(0, t)} \cdot \frac{1}{I_{(0, t+1)}}$$

**Proprietà Circolare delle basi:** data la successione dei numeri indici a base variabile, per ottenere la corrispondente successione a base fissa si moltiplicano tutti gli indici a base mobile a ritroso nel tempo

$$I_{(0, t)} = \prod_{j=1}^t I_{(j-1, j)} = I_{(0,1)} \times I_{(1,2)} \times I_{(2,3)} \times \dots \times I_{(t-1, t)}$$



## 9 – Esercizio

## Unità n° 06

La tabella seguente riporta la serie annuale del reddito mensile di un individuo, dal 1995 al 2000

	Reddito (euro)
1995	1175
1996	1190
1997	1205
1998	1220
1999	1250
2000	1310

*Si calcoli la serie dei numeri indice a base fissa (base 1995=100)*

*Si calcoli la serie dei numeri indici a base mobile*

anno	reddito		num. indice	var. rel.
1995	1175	1	100	0,00%
1996	1190	1,012766	101	1,28%
1997	1205	1,025532	103	2,55%
1998	1220	1,038298	104	3,83%
1999	1250	1,06383	106	6,38%
2000	1310	1,114894	111	11,49%

*La serie delle variazioni relative mostra come il reddito sia aumentato ogni anno rispetto al 1995. Nello specifico si può osservare come tra il 1995 e il 2000 il reddito abbia avuto complessivamente un incremento del 11,49%*

anno	reddito		num. indice	var. rel.
1995	1175	-	-	-
1996	1190	1,012766	101	1,28%
1997	1205	1,012605	101	1,26%
1998	1220	1,012448	101	1,24%
1999	1250	1,02459	102	2,46%
2000	1310	1,048	105	4,80%

*La serie delle variazioni relative mostra come il reddito sia aumentato ogni anno dal 1996 al 1998 del 1,2% circa, mentre nel 1999 e nel 2000 la crescita è stata rispettivamente doppia e quadrupla rispetto agli anni precedenti*

## 10 – Esercizio

## Unità n° 06

*Le variazioni percentuali rispetto all'anno precedente del prezzo del caffè sono risultate le seguenti:*

Anno	Tassi di Variazione
1999	–
2000	+2,5%
2001	+4,8%
2002	–1,7%
2003	+0,9%

*Si determini la serie storica dei numeri indice a base fissa del prezzo della marca di caffè, con base 2000 = 100*

*Si commenti la serie dei numeri indice ottenuta*

*Si calcoli il tasso medio annuo di variazione del prezzo del caffè nell'intero periodo considerato (1999-2003)*

anno	var. rel.	num.indice (base mobile)	num.indice (base 2000=100)
1999	-	-	97,6
2000	1,025	102,5	100,0
2001	1,048	104,8	104,8
2002	0,983	98,3	103,0
2003	1,009	100,9	103,9

*La serie dei numeri indice a base fissa, con 2000 come anno di riferimento mostra un aumento del prezzo del caffè nel 2001 del 4,8%, seguito dagli anni successivi da una crescita più contenuta (3% nel 2001 e 3,9% nel 2002)*

$$M_g = \left( \prod_{i=1999}^{2002} I_{(i,i+1)} \right)^{1/4} = 1,0159$$

*Il tasso medio annuo di variazione del prezzo del caffè è stato del 1,6% circa*

**11 – Esercizio**

**Unità n° 06**

*La seguente serie storica riporta la quantità di fertilizzanti (in migliaia di tonnellate) utilizzati in Italia dal 1997 al 2001:*

	<b>1997</b>	<b>1998</b>	<b>1999</b>	<b>2000</b>	<b>2001</b>
<i>azoto</i>	894,0	876,1	863,0	871,6	876,0
<i>fosfato</i>	528,0	506,9	491,7	491,0	491,0
<i>potassio</i>	397,5	393,5	385,6	387,5	383,6
<b>TOTALE</b>	<b>1819,5</b>	<b>1776,5</b>	<b>1740,3</b>	<b>1750,1</b>	<b>1750,6</b>



- ➔ *Costruire la serie dei numeri indice a base fissa con base al 1997 e la serie dei numeri indice a base mobile per i tre fertilizzanti*
- ➔ *Rappresentare in due grafici separati le serie a base fissa e a base mobile e commentare*
- ➔ *Calcolare la variazione relativa media nell'arco temporale considerato per i diversi tipi di fertilizzante*

## 12 – I numeri indici composti

## Unità n° 06

I **numeri indici composti** consentono di ottenere un valore sintetico rappresentativo della variazione di un insieme di fenomeni rispetto ad un tempo o luogo base, anziché di un solo fenomeno come nel caso degli indici elementari

*il fenomeno complesso è scomposto nei suoi elementi componenti, per ciascuno dei quali è calcolato un indice: la sintesi, tramite opportune procedure, delle misure dei singoli rapporti permette di ottenere un indice globale capace di tradurre in un valore leggibile il confronto storico o territoriale che si istituisce in relazione al fenomeno oggetto di studio*

- ➔ **Indici dei prezzi**, sono approntate in relazione alla fase di scambio, alle transazioni collegate, alla natura merceologica dei beni, ecc.
- ➔ **Indici delle quantità**, sono approntate in relazione alla fase di scambio, alla destinazione economica dei beni, ecc.
- ➔ **Indici dei valori**, sono approntate in relazione alle operazioni su beni, riferite cioè a merci, e alle operazioni non riguardanti merci, comprese le operazioni finanziarie

Il **valore** è una funzione empirica che lega il prezzo P e la quantità Q tale che  **$P \times Q = V$**

## 13 – Costruzione degli indici sintetici

## Unità n° 06

In generale, i principali momenti di scelta riguardano:

- ➔ **scelta degli elementi** (numero e tipo) che comporranno il numero indice complesso e definizione delle diverse modalità per la loro rilevazione
- ➔ **scelta della base** per la costruzione dei numeri indice semplici; si cerca di scegliere come riferimento l'anno in cui il fenomeno si ritiene abbia avuto una "evoluzione normale"
- ➔ **scelta delle formule di sintesi** (e tipo di pesi nel caso di ponderazione) degli indici semplici

Tra le tecniche adoperate nella pratica le più frequenti sono due:

- ➔ **(a) Sintesi degli indici elementari**
- ➔ **(b) Rapporto tra aggregati di valore**

Gli strumenti statistici utilizzati da un punto di vista operativo, sia nel primo sia nel secondo caso, sono la media aritmetica e la media geometrica

## 14 – Sintesi degli indici elementari

## Unità n° 06

Per determinare l'indice composto si calcolano gli indici elementari di ciascuna serie, tutti con la stessa base, quindi si procede alla sintesi:

Media aritmetica 
$$I_{(0,t)} = \frac{\sum_k \left( \frac{{}_k H_t}{{}_k H_0} \right)}{k}$$

Media geometrica 
$$I_{(0,t)} = \sqrt[k]{\prod_k \left( \frac{{}_k H_t}{{}_k H_0} \right)}$$

Nella tabella seguente sono riportati gli arrivi di turisti stranieri nelle province dell'Emilia Romagna nel '92 e nel '93

Provincia	1992	1993
Bologna	2650	3123
Ferrara	4300	4600
Forli	9850	11234
Parma	2100	2150
Modena	2346	2400
Reggio Emilia	1980	2100
Piacenza	1235	1250
Ravenna	4579	4980

Provincia	$I_{(92,93)}$
Bologna	118
Ferrara	107
Forli	114
Parma	102
Modena	102
Reggio Emilia	106
Piacenza	101
Ravenna	109

Quale sarà la variazione tra il 1992 e il 1993 per l'intera regione?



Media aritmetica 
$$I_{(92,93)} = 107$$

Media geometrica 
$$I_{(92,93)} = 107,3$$

## 15 – Rapporto tra aggregati di valore

## Unità n° 06

Spesso le medie semplici di numeri indici elementari non sono soddisfacenti e si preferisce assegnare un peso a ciascuna serie per differenziarne l'importanza

➔ I pesi scelti devono essere positivi e addizionabili

$$I_{(0,t)} = \frac{\sum_k \frac{H_{kt}}{H_{k0}} \cdot m_k}{\sum_k m_k}$$

➔ **peso**

È praticamente una media aritmetica ponderata degli indici elementari

Attraverso questo metodo sono costruiti due dei principali numeri indici composti, per i prezzi e per le quantità: a seconda del tipo di peso scelto avremo gli indici di

**Laspeyres** ➔ utilizza come sistema di pesi i prezzi (o le quantità) dell'anno base

**Paasche** ➔ utilizza come sistema di pesi i prezzi (o le quantità) dell'anno corrente

## 16 – Indici di Laspeyres

## Unità n° 06

### Indice dei prezzi di Laspeyres

$$I_{(0,t)}^L = \frac{\sum \frac{p_t}{p_0} \cdot p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0}$$

La base dell'indice è invariata: quindi è possibile considerare l'indice ottenuto come un **indice composto a base fissa**

Esprime rispetto ai periodi considerati la variazione non di un solo bene ma di un "paniere" di beni

### Indice delle quantità di Laspeyres

$$I_{(0,t)}^L = \frac{\sum \frac{q_t}{q_0} \cdot p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_0 q_t}{\sum p_0 q_0}$$

La regola di lettura è la stessa degli indici elementari:

- 1) se l'indice è maggiore di 100 la variazione è positiva
- 2) se l'indice è minore di 100 la variazione è negativa

Tale metodo presenta una certa **tendenziosità positiva**, tende cioè a sopravvalutare gli aumenti e a sottovalutare le diminuzioni (variazioni positive e negative)



## 17 – Indici di Paasche

## Unità n° 06

### Indice dei prezzi di Paasche

$$I_{(0,t)}^P = \frac{\sum p_t q_t}{\sum \frac{p_0}{p_t} \cdot p_t q_t} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_t}$$

### Indice delle quantità di Paasche

$$I_{(0,t)}^P = \frac{\sum p_t q_t}{\sum \frac{q_0}{q_t} \cdot p_t q_t} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_0}$$

La base dell'indice è diversa in relazione al periodo considerato per il confronto: quindi è possibile considerare l'indice ottenuto come un indice composto a base mobile

La regola di lettura è la stessa degli indici elementari:

- 1) se l'indice è maggiore di 100 la variazione è positiva
- 2) se l'indice è minore di 100 la variazione è negativa

Sono meno utilizzati degli indici di Laspeyres

Tale metodo presenta una certa **tendenziosità negativa**, tende cioè a sottovalutare gli aumenti e a sopravvalutare le diminuzioni (variazioni positive e negative)

**18 – Esempio**

**Unità n° 06**

Consideriamo i prezzi e le quantità relativi alla fornitura di materiale ad una piccola impresa di pulizie nel 1995 e nel 1996 (prezzi in lire):

prodotto	quantità 1995	prezzo 1995	quantità 1996	prezzo 1996
	$q_0$	$p_0$	$q_1$	$p_1$
detergente vetri	200	2500	215	3000
cera pavimenti	160	5300	180	6000
scopa	40	10500	45	12000
straccio	150	600	120	680
detersivo A	90	3200	80	4000
detersivo B	250	4400	200	4800



	valori effettivi		valori teorici	
	$q_0 p_0$	$q_1 p_1$	$q_1 p_0$	$q_0 p_1$
detergente vetri	500000	645000	537500	600000
cera pavimenti	848000	1080000	954000	960000
scopa	420000	540000	472500	480000
straccio	90000	81600	72000	102000
detersivo A	288000	320000	256000	360000
detersivo B	1100000	960000	880000	1200000
<b>totale</b>	<b>3246000</b>	<b>3626600</b>	<b>3172000</b>	<b>3702000</b>

$$I_{(95,96)}^L = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{3.702.000}{3.246.000} = 1,140 \rightarrow 114$$

$$I_{(95,96)}^P = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_t} = \frac{3.626.600}{3.172.000} = 1,143 \rightarrow 114$$

**19 – Esempio**

**Unità n° 06**

Supponiamo di considerare in due tempi diversi le quotazioni in borsa di 4 titoli

	Assitalia	Generali	RAS	Unipol
<i>quotazioni</i>				
$p_1$	31,81	106,95	47,10	25,40
$p_2$	21,79	91,40	41,18	21,11
Var %	0,685	0,855	0,874	0,831
<i>titoli trattati</i>				
$q_1$	208400	148980	111000	59200
$q_2$	240700	114200	90350	23800
Var %	1,155	0,767	0,814	0,402



	<i>valori effettivi</i>		<i>valori teorici</i>	
	$p_1q_1$	$p_2q_2$	$p_1q_2$	$p_2q_1$
Assitalia	6629412,4	5244853	7656907,7	4541036
Generali	15933411	10437880	12213690	13616772
RAS	5228100	3720613	4255485	4570980
Unipol	1503680	502418	604520	1249712
	29294603,4	19905764	24730602,7	23978500

L'indice dei valori è dato dal rapporto tra i valori effettivi al tempo 1 e 2:  $V = \frac{19906}{29294} = 0,68 \rightarrow -32\%$

Gli indici di Laspeyres e Paasche per i prezzi e le quantità saranno:

$${}^L I_{(P)} = \frac{\sum p_2 q_1}{\sum p_1 q_1} = \frac{23979}{29294} \Rightarrow 82$$

$${}^P I_{(P)} = \frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_1 q_2} = \frac{19906}{24730} \Rightarrow 80$$

$${}^L I_{(Q)} = \frac{\sum p_1 q_2}{\sum p_1 q_1} = \frac{24730}{29294} \Rightarrow 84$$

$${}^P I_{(Q)} = \frac{\sum p_2 q_2}{\sum p_2 q_1} = \frac{19906}{23979} \Rightarrow 83$$

## 20 – Indici di Fischer

## Unità n° 06

Allo scopo di neutralizzare le opposte tendenze dei due indici I. Fischer (1922) ha proposto un indice corrispondente alla media geometrica degli indici di Laspeyres e Paasche

$${}^F \mathbf{I}_{(p)} = \sqrt{{}^P \mathbf{I}_{(p)} \times {}^L \mathbf{I}_{(p)}} = \sqrt{\frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_0 Q_t} \times \frac{\sum P_t Q_0}{\sum P_0 Q_0}}$$

**Indice dei prezzi  
di Fischer**

$${}^F \mathbf{I}_{(q)} = \sqrt{{}^P \mathbf{I}_{(q)} \times {}^L \mathbf{I}_{(q)}} = \sqrt{\frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_t Q_0} \times \frac{\sum P_0 Q_t}{\sum P_0 Q_0}}$$

**Indice delle quantità  
di Fischer**

Tali indici sono anche chiamati indici **ideali**, anche se numerose sono le critiche sulla loro costruzione

A tutt'oggi viene utilizzato soprattutto da USA e Canada, ma non nei paesi dell'UE, che hanno invece optato per la costruzione di indici basati sul metodo di Laspeyres

## 21 – Esercizio

## Unità n° 06

*Nella seguente tabella sono riportati i prezzi di vendita (€/kg), da azienda agricola a grossista, del grano tenero e del grano duro*

Anni	Grano tenero	Grano duro
2000	€ 3.20	€ 4.21
2001	€ 3.31	€ 4.05
2002	€ 3.29	€ 3.70
2003	€ 3.63	€ 4.06
2004	€ 3.52	€ 3.43



**Calcolare gli indici a base fissa e a base mobile dei prezzi dei due prodotti**

*Nella tabella successiva sono esposti i valori delle vendite (in milioni di €) dei due prodotti*

Anni	Grano tenero	Grano duro
2000	560.35	648.56
2001	632.99	804.21
2002	570.73	669.31
2003	581.11	695.25
2004	544.79	700.44

**Analizzare i prezzi del settore nel suo complesso, attraverso un indice composto a base fissa**