1 – I numeri indici

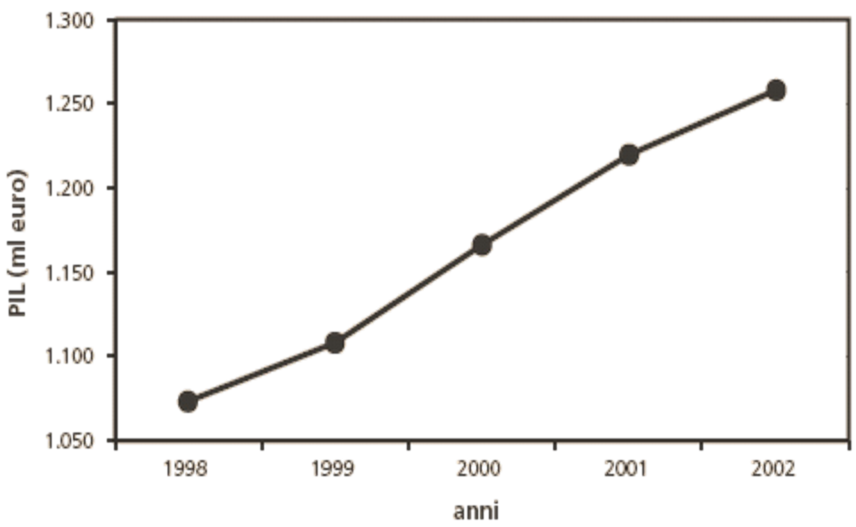
Unità n° 09

I **rapporti** o **numeri indici** pongono a confronto le intensità di un determinato carattere in tempi o luoghi differenti, pertanto sono istituiti tra i termini di una serie temporale (o territoriale)

Hanno lo scopo di fornire la variazione relativa di un fenomeno e sono numeri puri, non dipendono cioè dall'unità di misura del fenomeno stesso

Si definisce **serie temporale** o **serie storica** una sequenza di osservazioni quantitative $\mathbf{y_1, y_2, \ldots, y_T}$ relative ad un certo fenomeno **Y** (economico, sociale, …) rilevate a scadenze regolari nel tempo

ESEMPIO: *andamento del PIL ai prezzi di mercato in Italia dal 1998 al 2002*



Una serie storica è una successione ordinata di numeri reali che misura un certo fenomeno nella sua evoluzione rispetto al tempo

criterio → ***ordinamento temporale***

il tempo ha una direzione quindi esiste una storia

A seconda che si consideri un unico fenomeno (combinazione di un certo numero di componenti elementari in situazioni diverse) o più fenomeni (combinazione di componenti non elementari rispetto ad una situazione di riferimento) si avranno rispettivamente ***indici semplici*** e ***composti***

numeri indici semplici
costituiscono rapporti percentuali fra due grandezze economiche omogenee misurate in tempi o luoghi diversi

numeri indici composti
costituiscono indicatori delle variazioni relative di più fenomeni eterogenei, resi confrontabili dal riferimento a prezzi, quantità, ecc.
Si ottengono come sintesi di numeri indici semplici

→ Potremmo parlare di un ***approccio statistico*** per i numeri semplici e di ***approccio economico*** per i numeri composti

ESEMPIO: Indici che si riferiscono ai consumi delle famiglie

- ✓ Indice nazionale dei prezzi al consumo per l'intera collettività (NIC)
- ✓ Indice armonizzato dei prezzi al consumo per i paesi dell'Unione Europea (IPCA)
- ✓ Indice dei prezzi al consumo per le famiglie di operai e impiegati (FOI)

3 – Numeri indici semplici

I numeri indici semplici (o elementari) sono rapporti che mettono a confronto due misure di un fenomeno semplice, concreto, unico

Supponiamo di considerare la serie temporale di un fenomeno H

$$H_0, H_1, H_2, \ldots\ldots\ldots, H_{N-1}, H_N$$

con $H_i > 0$ (per i=0,1,2,3,........,N), dove ogni elemento è la misura ad un certo tempo (o luogo) di H: il rapporto fra due misure esprime il *numero indici elementare* ed è fornito dal quoziente

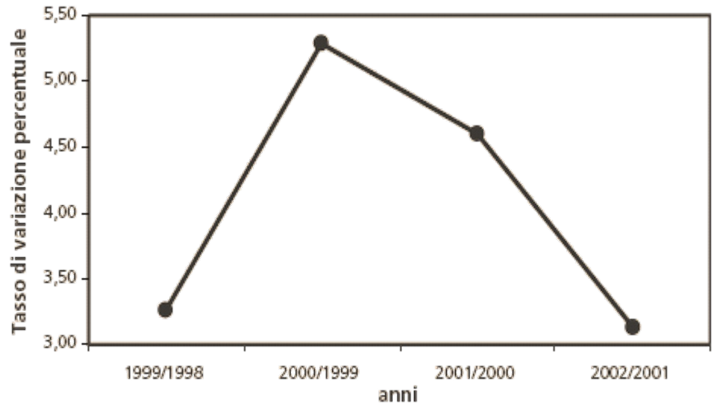
$$I_{(t,\, t+1)} = \frac{H_{t+1}}{H_t} \times 100$$

dove $\mathbf{H_t}$ è la misura della grandezza al tempo t (o nel luogo t) e $\mathbf{H_{t+1}}$ è la misura al tempo (o nel luogo) t+1

La grandezza al denominatore è detta *Base* o *Origine* del numero indice

ESEMPIO

tasso percentuale di variazione del PIL ai prezzi di mercato in Italia dal 1998 al 2002



4 – Alcune considerazioni

Che relazione c'è tra variazione relativa, tasso di variazione e numero indice?

In fondo sono tre modi diversi per valutare lo stesso aspetto: siamo interessati a studiare l'evoluzione nel tempo di un fenomeno e a quantificare questa evoluzione

Consideriamo il prezzo di un pacchetto di sigarette al tempo A e al tempo B e immaginiamo che il prezzo si modifichi da 3,00 € a 3,80 €: come è variata l'intensità del fenomeno nei due periodi?

variazione relativa

$$\frac{P_B}{P_A} = \frac{3,80}{3,00} \cong 1,27$$

$$1,27 - 1 = 0,27 \rightarrow 27\%$$

tasso di variazione

$$1,27 \times 100 = 127$$

numero indice

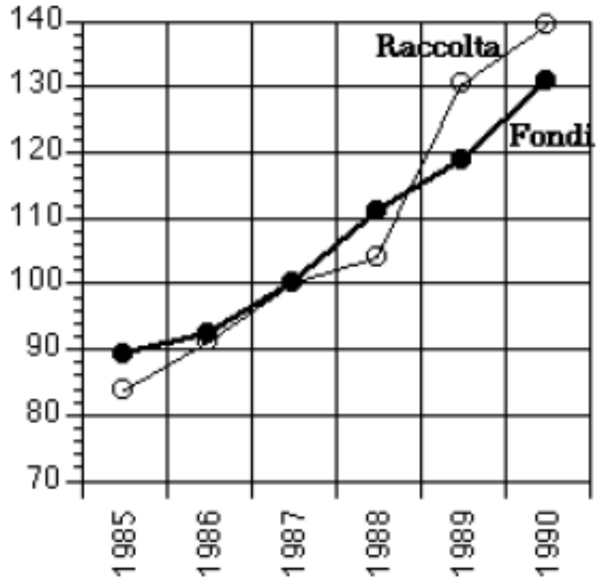
In qualsiasi modo rappresentiamo l'evoluzione del fenomeno abbiamo sempre lo stesso tipo di informazione: il nuovo prezzo è 1,27 volte quello rilevato in precedenza, cioè è cresciuto del 27%

Trattandosi di valori puri (rispetto alla scala), i numeri indici permettono di co-rappresentare valori espressi all'origine in unità di misura eterogenee

ESEMPIO

In tabella si riportano le serie storiche riguardanti la raccolta lorda (in miliardi di dollari) ed il numero di fondi monetari negli USA

Anno	Raccolta	Fondi
1985	730.1	348
1986	792.3	360
1987	869.1	389
1988	903.4	432
1989	1134.6	463
1990	1211.8	509



Le due serie, numericamente diverse, coesistono in uno stesso grafico basato sui numeri indici

Nel costruire i quozienti è determinante la scelta della base: possiamo infatti costruire numeri indici **a base fissa** e **a base mobile**

a base fissa

esprime l'intensità o la frequenza di un fenomeno con riferimento ad un fissato periodo di tempo

$$I_{(0,1)} = \frac{H_1}{H_0} \quad I_{(0,2)} = \frac{H_2}{H_0} \quad I_{(0,3)} = \frac{H_3}{H_0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad I_{(0,N)} = \frac{H_N}{H_0}$$

a base mobile

esprime l'intensità o la frequenza di un fenomeno con riferimento al periodo di tempo precedente

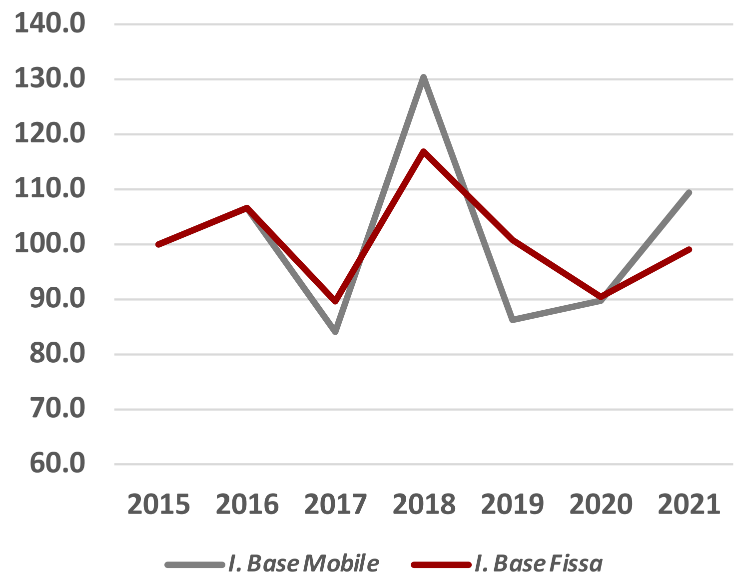
$$I_{(0,1)} = \frac{H_1}{H_0} \quad I_{(1,2)} = \frac{H_2}{H_1} \quad I_{(2,3)} = \frac{H_3}{H_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad I_{(N-1,N)} = \frac{H_N}{H_{N-1}}$$

In quest'ultimo caso si parla di ***concatenamento***

7 – Esempio

I dati in tabella sono relativi alle presenze di turisti in una località del Sud Italia. Calcolare gli indici elementari a base mobile e a base fissa con 2015=100

Anni	Presenze	I. Base Mobile	I. Base Fissa
2015	199332	100.0	100.0
2016	212484	106.6	106.6
2017	178644	84.1	89.6
2018	232941	130.4	116.9
2019	200922	86.3	100.8
2020	180323	89.7	90.5
2021	197345	109.4	99.0



L'indice a base fissa ha natura di **statica comparata** ed evidenzia un netto declino che non è invece apparente nell'indice a base mobile che ha natura **dinamica**:

- l'*indice a base fissa è più adatto a delineare evoluzioni di medio o lungo periodo*
- *l'indice a base mobile è adatto a evidenziare evoluzioni di breve termine e oscillazioni congiunturali*

Proprietà della Determinatezza: un indice non deve annullarsi, tendere a infinito, o diventare indeterminato se si annulla un termine compreso nella formula

Proprietà dell'identità: se le due situazioni messe a confronto sono uguali, ossia di uguale intensità, allora il numero indice elementare assume valore 1

$$H_j = H_k \Rightarrow I_{(j,k)} = \frac{H_k}{H_j} \cdot 100 = 100$$

Proprietà della Reversibilità delle basi: data la successione dei numeri indici a base fissa, per ottenere la corrispondente successione a base mobile si divide ciascun indice per il precedente

$$I_{(t,\, t+1)} = I_{(0,\, t)} \cdot \frac{1}{I_{(0,\, t+1)}}$$

Proprietà Circolare delle basi: data la successione dei numeri indici a base variabile, per ottenere la corrispondente successione a base fissa si moltiplicano tutti gli indici a base mobile a ritroso nel tempo

$$I_{(0,\, t)} = \prod_{j=1}^{t} I_{(j-1,\, j)} = I_{(0,1)} \times I_{(1,2)} \times I_{(2,3)} \times \ldots\ldots\ldots \times I_{(t-1,\, t)}$$

9 – Esercizio

La tabella seguente riporta la serie annuale del reddito mensile di un individuo, dal 1995 al 2000

	Reddito (euro)
1995	1175
1996	1190
1997	1205
1998	1220
1999	1250
2000	1310

Si calcoli la serie dei numeri indice a base fissa (base 1995=100)

Si calcoli la serie dei numeri indici a base mobile

anno	reddito		num. indice	var. rel.
1995	1175	1	100	0,00%
1996	1190	1,012766	101	1,28%
1997	1205	1,025532	103	2,55%
1998	1220	1,038298	104	3,83%
1999	1250	1,06383	106	6,38%
2000	1310	1,114894	111	11,49%

La serie delle variazioni relative mostra come il reddito sia aumentato ogni anno rispetto al 1995. Nello specifico si può osservare come tra il 1995 e il 2000 il reddito abbia avuto complessivamente un incremento del 11,49%

anno	reddito		num. indice	var. rel.
1995	1175	-	-	-
1996	1190	1,012766	101	1,28%
1997	1205	1,012605	101	1,26%
1998	1220	1,012448	101	1,24%
1999	1250	1,02459	102	2,46%
2000	1310	1,048	105	4,80%

La serie delle variazioni relative mostra come il reddito sia aumentato ogni anno dal 1996 al 1998 del 1,2% circa, mentre nel 1999 e nel 2000 la crescita è stata rispettivamente doppia e quadrupla rispetto agli anni precedenti

10 – Esercizio

Le variazioni percentuali rispetto all'anno precedente del prezzo del caffè sono risultate le seguenti:

Anno	Tassi di Variazione
1999	–
2000	+2,5%
2001	+4,8%
2002	–1,7%
2003	+0,9%

Si determini la serie storica dei numeri indice a base fissa del prezzo della marca di caffè, con base 2000 = 100

Si commenti la serie dei numeri indice ottenuta

Si calcoli il tasso medio annuo di variazione del prezzo del caffè nell'intero periodo considerato (1999-2003)

anno	var. rel.	num.indice (base mobile)	num.indice (base 2000=100)
1999	-	-	97,6
2000	1,025	102,5	100,0
2001	1,048	104,8	104,8
2002	0,983	98,3	103,0
2003	1,009	100,9	103,9

La serie dei numeri indice a base fissa, con 2000 come anno di riferimento mostra un aumento del prezzo del caffè nel 2001 del 4,8%, seguito dagli anni successivi da una crescita più contenuta (3% nel 2001 e 3,9% nel 2002)

$$M_g = \left(\prod_{i=1999}^{2002} I_{(i,i+1)} \right)^{1/4} = 1{,}0159$$

Il tasso medio annuo di variazione del prezzo del caffè è stato del 1,6% circa

I **numeri indici composti** consentono di ottenere un valore sintetico rappresentativo della variazione di un insieme di fenomeni rispetto ad un tempo o luogo base, anziché di un solo fenomeno come nel caso degli indici elementari

il fenomeno complesso è scomposto nei suoi elementi componenti, per ciascuno dei quali è calcolato un indice: la sintesi, tramite opportune procedure, delle misure dei singoli rapporti permette di ottenere un indice globale capace di tradurre in un valore leggibile il confronto storico o territoriale che si istituisce in relazione al fenomeno oggetto di studio

- ***Indici dei prezzi***, sono approntate in relazione alla fase di scambio, alle transazioni collegate, alla natura merceologica dei beni, ecc.
- ***Indici delle quantità***, sono approntate in relazione alla fase di scambio, alla destinazione economica dei beni, ecc.
- ***Indici dei valori***, sono approntate in relazione alle operazioni su beni, riferite cioè a merci, e alle operazioni non riguardanti merci, comprese le operazioni finanziarie

Il **valore** è una funzione empirica che lega il prezzo P e la quantità Q tale che $\mathbf{P \times Q = V}$

12 – Costruzione degli indici sintetici

In generale, i principali momenti di scelta riguardano:

- ***scelta degli elementi*** (numero e tipo) che comporranno il numero indice complesso e definizione delle diverse modalità per la loro rilevazione
- ***scelta della base*** per la costruzione dei numeri indice semplici; si cerca di scegliere come riferimento l'anno in cui il fenomeno si ritiene abbia avuto una "evoluzione normale"
- ***scelta delle formule di sintesi*** (e tipo di pesi nel caso di ponderazione) degli indici semplici

Tra le tecniche adoperate nella pratica le più frequenti sono due:

- **(a) Sintesi degli indici elementari**
- **(b) Rapporto tra aggregati di valore**

Gli strumenti statistici utilizzati da un punto di vista operativo, sia nel primo sia nel secondo caso, sono la media aritmetica e la media geometrica

13 – Sintesi degli indici elementari

Per determinare l'indice composto si calcolano gli indici elementari di ciascuna serie, tutti con la stessa base, quindi si procede alla sintesi:

Media aritmetica

$$I_{(0,t)} = \frac{\sum_k \left(\frac{{}_kH_t}{{}_kH_0} \right)}{k}$$

Media geometrica

$$I_{(0,t)} = \sqrt[k]{\prod_k \left(\frac{{}_kH_t}{{}_kH_0} \right)}$$

Nella tabella seguente sono riportati gli arrivi di turisti stranieri nelle province dell'Emilia Romagna nel '92 e nel '93

Provincia	*1992*	*1993*
Bologna	2650	3123
Ferrara	4300	4600
Forlì	9850	11234
Parma	2100	2150
Modena	2346	2400
Reggio Emilia	1980	2100
Piacenza	1235	1250
Ravenna	4579	4980

Provincia	$I_{(92,93)}$
Bologna	118
Ferrara	107
Forlì	114
Parma	102
Modena	102
Reggio Emilia	106
Piacenza	101
Ravenna	109

Quale sarà la variazione tra il 1992 e il 1993 per l'intera regione?

Media aritmetica $I_{(92,93)} = 107$

Media geometrica $I_{(92,93)} = 107{,}3$

14 – Rapporto tra aggregati di valore

Spesso le medie semplici di numeri indici elementari non sono soddisfacenti e si preferisce assegnare un peso a ciascuna serie per differenziarne l'importanza

→ I pesi scelti devono essere <u>positivi</u> e <u>addizionabili</u>

$$I_{(0,t)} = \frac{\sum_k \frac{{}_kH_t}{{}_kH_0} \cdot m_k}{\sum_k m_k}$$

m_k → peso

È praticamente una media aritmetica ponderata degli indici elementari

Attraverso questo metodo sono costruiti due dei principali numeri indici composti, per i prezzi e per le quantità: a seconda del tipo di peso scelto avremo gli indici di

Laspeyres → utilizza come sistema di pesi i prezzi (o le quantità) dell'anno base

Paasche → utilizza come sistema di pesi i prezzi (o le quantità) dell'anno corrente

Indice dei prezzi di Laspeyres

$$I^{L}_{(0,t)} = \frac{\sum \frac{p_t}{p_0} \cdot p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0}$$

Indice delle quantità di Laspeyres

$$I^{L}_{(0,t)} = \frac{\sum \frac{q_t}{q_0} \cdot p_0 q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{\sum p_0 q_t}{\sum p_0 q_0}$$

La base dell'indice è invariata: quindi è possibile considerare l'indice ottenuto come un **indice composto a base fissa**

Esprime rispetto ai periodi considerati la variazione non di un solo bene ma di un "paniere" di beni

La regola di lettura è la stessa degli indici elementari:

1) se l'indice è maggiore di 100 la variazione è positiva

2) se l'indice è minore di 100 la variazione è negativa

Tale metodo presenta una certa ***tendenziosità positiva***, tende cioè a sopravvalutare gli aumenti e a sottovalutare le diminuzioni (variazioni positive e negative)

16 – Indici di Paasche

Indice dei prezzi di Paasche

$$I^P_{(0,t)} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum \frac{p_0}{p_t} \cdot p_t q_t} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_t}$$

Indice delle quantità di Paasche

$$I^P_{(0,t)} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum \frac{q_0}{q_t} \cdot p_t q_t} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_t q_0}$$

La base dell'indice è diversa in relazione al periodo considerato per il confronto: quindi è possibile considerare l'indice ottenuto come un **indice composto a base mobile**

La regola di lettura è la stessa degli indici elementari:

1) se l'indice è maggiore di 100 la variazione è positiva

2) se l'indice è minore di 100 la variazione è negativa

Sono meno utilizzati degli indici di Laspeyres

Tale metodo presenta una certa ***tendenziosità negativa***, tende cioè a sottovalutare gli aumenti e a sopravvalutare le diminuzioni (variazioni positive e negative)

17 – Esempio

Consideriamo i prezzi e le quantità relativi alla fornitura di materiale ad una piccola impresa di pulizie nel 1995 e nel 1996 (prezzi in lire):

prodotto	*quantità 1995* q_0	*prezzo 1995* p_0	*quantità 1996* q_1	*prezzo 1996* p_1
detergente vetri	200	2500	215	3000
cera pavimenti	160	5300	180	6000
scopa	40	10500	45	12000
straccio	150	600	120	680
detersivo A	90	3200	80	4000
detersivo B	250	4400	200	4800

	valori effettivi q_0p_0	*valori effettivi* q_1p_1	*valori teorici* q_1p_0	*valori teorici* q_0p_1
detergente vetri	500000	645000	537500	600000
cera pavimenti	848000	1080000	954000	960000
scopa	420000	540000	472500	480000
straccio	90000	81600	72000	102000
detersivo A	288000	320000	256000	360000
detersivo B	1100000	960000	880000	1200000
totale	3246000	3626600	3172000	3702000

$$I^L_{(95,96)} = \frac{\sum p_t q_0}{\sum p_0 q_0} = \frac{3.702.000}{3.246.000} = 1{,}140 \rightarrow 114$$

$$I^P_{(95,96)} = \frac{\sum p_t q_t}{\sum p_0 q_t} = \frac{3.626.600}{3.172.000} = 1{,}143 \rightarrow 114$$

18 – Esempio

Supponiamo di considerare in due tempi diversi le quotazioni in borsa di 4 titoli

	Assitalia	Generali	RAS	Unipol
	quotazioni			
p_1	31,81	106,95	47,10	25,40
p_2	21,79	91,40	41,18	21,11
Var %	0,685	0,855	0,874	0,831
	titoli trattati			
q_1	208400	148980	111000	59200
q_2	240700	114200	90350	23800
Var %	1,155	0,767	0,814	0,402

	valori effettivi		*valori teorici*	
	p_1q_1	p_2q_2	p_1q_2	p_2q_1
Assitalia	6629412,4	5244853	7656907,7	4541036
Generali	15933411	10437880	12213690	13616772
RAS	5228100	3720613	4255485	4570980
Unipol	1503680	502418	604520	1249712
	29294603,4	19905764	24730602,7	23978500

L'indice dei valori è dato dal rapporto tra i valori effettivi al tempo 1 e 2: $V = \frac{19906}{29294} = 0{,}68 \rightarrow -32\%$

Gli indici di Laspeyres e Paasche per i prezzi e le quantità saranno:

$$^{L}I_{(P)} = \sum p_2q_1 / \sum p_1q_1 = \frac{23979}{29294} \Rightarrow 82$$

$$^{P}I_{(P)} = \sum p_2q_2 / \sum p_1q_2 = \frac{19906}{24730} \Rightarrow 80$$

$$^{L}I_{(Q)} = \sum p_1q_2 / \sum p_1q_1 = \frac{24730}{29294} \Rightarrow 84$$

$$^{P}I_{(Q)} = \sum p_2q_2 / \sum p_2q_1 = \frac{19906}{23979} \Rightarrow 83$$

Allo scopo di neutralizzare le opposte tendenze dei due indici I. Fischer (1922) ha proposto un indice corrispondente alla media geometrica degli indici di Laspeyres e Paasche

$$ {}^{F}I_{(p)} = \sqrt{{}^{P}I_{(p)} \times {}^{L}I_{(p)}} = \sqrt{\frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_0 Q_t} \times \frac{\sum P_t Q_0}{\sum P_0 Q_0}} $$

Indice dei prezzi di Fischer

$$ {}^{F}I_{(q)} = \sqrt{{}^{P}I_{(q)} \times {}^{L}I_{(q)}} = \sqrt{\frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_t Q_0} \times \frac{\sum P_0 Q_t}{\sum P_0 Q_0}} $$

Indice delle quantità di Fischer

Tali indici sono anche chiamati indici ***ideali***, anche se numerose sono le critiche sulla loro costruzione

A tutt'oggi viene utilizzato soprattutto da USA e Canada, ma non nei paesi dell'UE, che hanno invece optato per la costruzione di indici basati sul metodo di Laspeyres