01 – Eventi condizionati

Quando si ha motivo di credere che il verificarsi di uno o più eventi è subordinato al verificarsi di altri eventi, si è soliti distinguere tra eventi *dipendenti* (o *condizionati*) e *indipendenti*

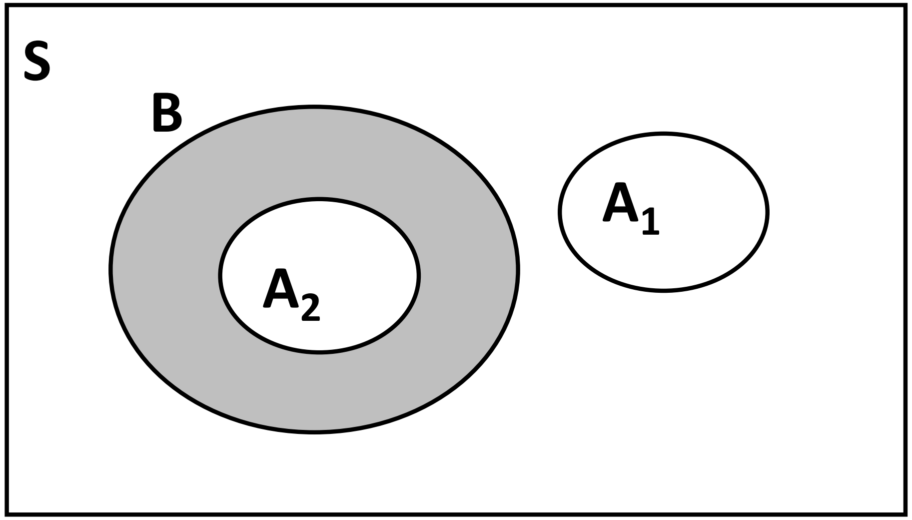
Siano A e B due eventi di S: si definisce evento condizionato $A|B$ l'evento A che si verifica dato che si è verificato l'evento B e tale che:

- $A|B$ risulta *vero* se $A \cap B$ è vero (essendo vero B risulta vero anche A)
- $A|B$ risulta *falso* se $\overline{A} \cap B$ è vero (essendo vero B risulta falso A)
- $A|B$ risulta *indeterminato* se B è falso (una volta acquisita tale informazione su B non interessa sapere se A è vero o falso)

Ovviamente è necessario modificare opportunamente lo spazio campionario per tener conto dell'evento che con il suo verificarsi o meno condiziona il verificarsi degli altri eventi

02 – Condizionamento e diagrammi di Venn

Sia $B \subset S$ un evento di interesse per l'esperimento: come si modifica lo spazio nell'ipotesi che l'evento B si verifichi?



Se si è interessati all'evento A_1 si ha allora

$$B \cap A_1 = \varnothing$$

Se invece l'evento di interesse è A_2 allora il fatto che $A_2 \subset B$ implica che verificandosi B si verifica anche A_2

Formalmente lo spazio campionario si riduce in questo caso all'insieme B, ma per comodità continuiamo a rappresentare l'intero spazio S

Le regole in base alle quali si calcola la probabilità che un evento si verifichi devono valore anche per gli eventi condizionati:

Postulato 1 ➡ $P(A|B) \geq 0$

Postulato 2 ➡ $P(\Omega|B) = 1$

Postulato 3 ➡ $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B)$

Consideriamo un esperimento consistente nel lancio di un dado

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Qual è la probabilità che lanciando un dado sia uscito 5 sapendo che il risultato è un numero dispari? [evento A condizionato all'evento B]

A	1	2	3	4	5	6	
$P(A)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	1

→

A	1	2	3	4	5	6	
$P(A)$	$1/6$	0	$1/6$	0	$1/6$	0	$1/2$

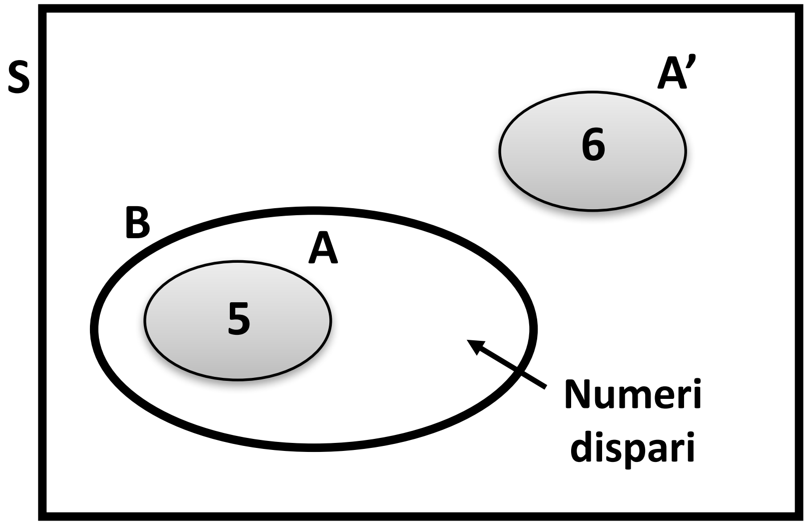
Se sappiamo che è uscito un numero dispari questo modifica la prova: alcuni eventi non possono più verificarsi

riscalando le probabilità rispetto all'ipotesi che il numero uscito sia dispari otteniamo allora

$A \mid B$	1	3	5	
$P(A \mid B)$	$1/3$	$1/3$	$1/3$	1

05 – Calcolo della probabilità condizionata — Unità n° 09

Si definisce probabilità condizionata di A dato B il rapporto tra la probabilità dell'evento intersezione ($A \cap B$) e la probabilità dell'evento B



$$P(A|B) = \frac{\text{n. dei casi favorevoli a } (A \cap B)}{\text{n. dei casi favorevoli a } B}$$

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2}}$$

Le probabilità devono essere ridefinite alla luce dell'evento "il risultato è un numero dispari" (A) e *riscalate* in modo da ottenere somma 1 (evento certo)

Per comodità abbiamo mantenuto lo stesso simbolo P per indicare la probabilità condizionata, ma è chiaro che la funzione non è più la stessa di quella originaria

1) Probabilità dell'evento contrario

Dato un evento A e il suo complemento $\bar{A}$ si ha che

$$P\left[\bar{A}|B\right] = 1 - P\left[A|B\right]$$

2) Probabilità dell'evento differenza

Dati due eventi compatibili A_1 e A_2, la probabilità dell'evento differenza A_1 - A_2 è data da

$$P\left[\left(A_1 - A_2\right)|B\right] = P\left[A_1|B\right] - P\left[\left(A_1 \cap A_2\right)|B\right]$$

3) Probabilità dell'evento unione (probabilità totali)

Dati due eventi compatibili A_1 e A_2, la probabilità che si verifichi almeno uno degli eventi è

$$P\left[\left(A_1 \cup A_2\right)|B\right] = P\left[A_1|B\right] + P\left[A_2|B\right] - P\left[\left(A_1 \cap A_2\right)|B\right]$$

07 – Probabilità composte e indipendenza

Dati gli eventi A, B e $A|B$, le probabilità di $(A \cap B)$, di B e di $A|B$ sono legate dal cosiddetto

TEOREMA DELLE PROBABILITA' COMPOSTE

Siano A e B due eventi compatibili e si consideri l'evento condizionato A|B. Si dimostra che:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B)}$$

Da tale definizione possiamo anche dedurre cosa accade se un evento non condiziona l'altro

INDIPENDENZA STOCASTICA

Due eventi A e B sono indipendenti se il verificarsi dell'uno non altera la probabilità dell'altro

$$\boxed{P(B|A) = P(B) \qquad\qquad P(A|B) = P(A)}$$

l'evento A è stocasticamente indipendente da B (e viceversa)

08 – Ancora sull'indipendenza

L'interpretazione data prima degli eventi indipendenti è coerente con la definizione già vista di probabilità condizionata

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = P(A) \cdot P(B)$$

La probabilità dell'evento intersezione ($A \cap B$), con A e B compatibili e indipendenti, è uguale al prodotto delle probabilità di A e B

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)}$$

L'indipendenza è una relazione BILATERALE: se A è indipendente da B allora è vero anche il contrario, purché $A \neq \varnothing$

Due eventi incompatibili A e B sono indipendenti solo se la probabilità che si verifichi A (o B) è pari a 0

TTTT	TTTT	TTTT
CTTT	CTTT	CTTT
TCTT	TCTT	TCTT
CCTT	CCTT	CCTT
TTCT	TTCT	TTCT
CTCT	CTCT	CTCT
TCCT	TCCT	TCCT
CCCT	CCCT	CCCT
TTTC	TTTC	TTTC
CTTC	CTTC	CTTC
TCTC	TCTC	TCTC
CCTC	CCTC	CCTC
TTCC	TTCC	TTCC
CTCC	CTCC	CTCC
TCCC	TCCC	TCCC
CCCC	CCCC	CCCC

Lanciando 4 volte una moneta sia

A = il 1° ed il 3° lancio danno lo stesso esito
B = il 2° ed il 4° lancio danno lo stesso esito

Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A|B)$, $P(B|A)$

Dire se A e B sono indipendenti.

$P(A) = 8/16 = 0.500$
$P(B) = 8/16 = 0.500$
$P(A \cap B) = 4/16 = 0.250$
$P(A \mid B)=P(A \cap B) / P(B) = 0.500$
$P(B \mid A)=P(A \cap B) / P(A) = 0.500$

A e B sono indipendenti

10 – Esempio

TTTT	**TTTT**	**TTTT**
CTTT	**CTTT**	CTTT
TCTT	**TCTT**	**TCTT**
CCTT	CCTT	CCTT
TTCT	**TTCT**	TTCT
CTCT	CTCT	CTCT
TCCT	TCCT	TCCT
CCCT	CCCT	CCCT
TTTC	**TTTC**	**TTTC**
CTTC	CTTC	CTTC
TCTC	TCTC	TCTC
CCTC	CCTC	CCTC
TTCC	TTCC	TTCC
CTCC	CTCC	CTCC
TCCC	TCCC	TCCC
CCCC	CCCC	CCCC

Lanciando 4 volte una moneta sia

A = il 1° ed il 3° lancio danno lo stesso esito
B = esce testa almeno 3 volte

Calcolare $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A|B)$, $P(B|A)$

Dire se A e B sono indipendenti.

$P(A) = 8/16 = 0.500$
$P(B) = 5/16 = 0.3125$
$P(A \cap B) = 3/16 = 0.1875$
$P(A|B)=P(A \cap B) / P(B) = 3/5 = 0.600$
$P(B|A)=P(A \cap B) / P(A) = 6/16 = 0.375$

A e B *non* sono indipendenti

Si supponga che gli eventi A e B siano indipendenti e che si abbia P(A) = 0,45 e P(B) = 0,80

(1) Calcolare P(A U B)

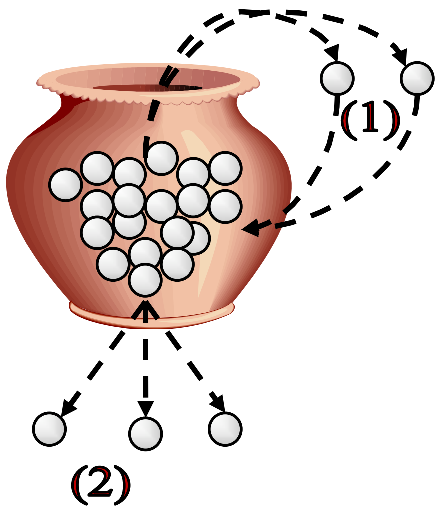
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0,45 + 0,80 - 0,45 \cdot 0,80 = 0,89$$

(2) Calcolare $P(\bar{A}|\bar{B})$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \frac{1 - 0,89}{1 - 0,80} = 0,55$$

12 – Estrazione con e senza reimmissione

Supponiamo di avere un'urna con N palline numerate



(1) **La probabilità di estrarre una pallina è costante e pari a $\frac{1}{N}$**

Il reinserimento dopo l'identificazione ricrea a ogni estrazione la situazione di partenza (*eventi indipendenti*)

(2) **La probabilità di estrarre una pallina varia ad ogni estrazione e dipende dai risultati precedenti**

Il non reinserimento dopo l'identificazione modifica a ogni estrazione la situazione di partenza (*eventi dipendenti*)

Supponiamo di estrarre <u>senza reimmissione</u> due palline da un'urna che contiene 3 palline bianche e 7 nere. Qual è la probabilità di:

1) *Estrarre una pallina bianca e una pallina nera*

$$P(N_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap N_2) = P(N_1)P(B_2|N_1) + P(B_1)P(N_2|B_1) =$$

$$= \left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{3}{9}\right) + \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{9}\right) = 0{,}47$$

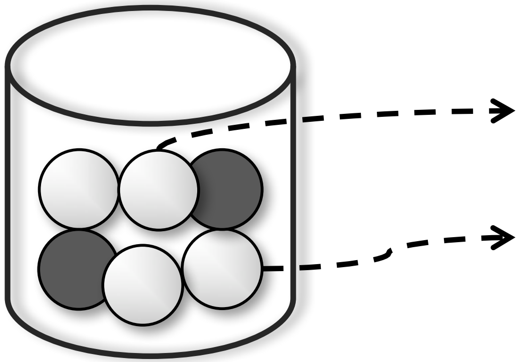
2) *Estrarre due palline dello stesso colore*

$$P(N_1 \cap N_2) + P(B_1 \cap B_2) = \left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{6}{9}\right) + \left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{2}{9}\right) = 0{,}53$$

13 – Esempio: eventi dipendenti

Un'urna contiene 4 biglie bianche e 2 biglie nere. Si estraggono <u>senza reimmissione</u> due biglie. Qual è la probabilità che entrambe le biglie siano di colore bianco?

L'estrazione della prima biglia modifica lo spazio campionario



B_1= prima biglia bianca

B_2= seconda biglia bianca

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1) = \left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{2}{5} \Rightarrow \mathbf{40\%}$$

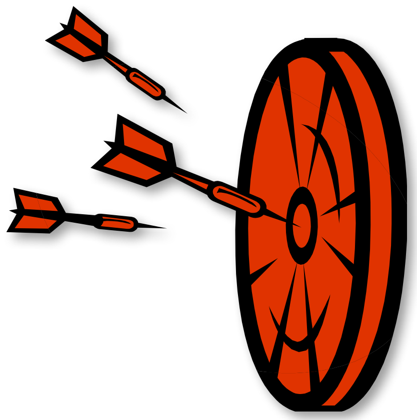
Probabilità di estrarre una pallina bianca

Probabilità di estrarre una pallina bianca dato che la prima pallina è bianca

14 – Esempio: eventi indipendenti

In una gara di tiro al bersaglio il signor Rossi centra mediamente 3 bersagli su 5 tiri. Su due tiri qual è la probabilità che:

a) Centri due bersagli *b) Non centri alcun bersaglio*
c) Centri un bersaglio *d) Centri almeno un bersaglio*



La probabilità di far centro è data da casi favorevoli sui casi possibili:

E = centro il bersaglio => $P(E) = 3/5$

a) $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = (3/5) \cdot (3/5) = 9/25$

b) $P(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2) = P(\bar{E}_1) \cdot P(\bar{E}_2) = (2/5) \cdot (2/5) = 4/25$

c) $P(E_1 \cap \bar{E}_2) + P(\bar{E}_1 \cap E_2) = (3/5) \cdot (2/5) + (2/5) \cdot (3/5) = 12/25$

d) $[P(E_1 \cap \bar{E}_2) + P(\bar{E}_1 \cap E_2)] + P(E_1 \cap E_2) = (12/25) + (9/25)$

15 – Esercizio

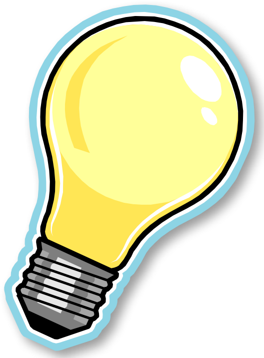
In un cassetto ci sono 10 lampadine di cui 6 funzionanti e 4 esaurite. Dal cassetto vengono prese a caso (senza reimm.) 3 lampadine. Qual è la probabilità che le lampadine siano:

a) Tutti e tre funzionanti

b) Tutte e tre esaurite

c) Due funzionanti e una esaurita

d) Almeno una funzionante



a) $P(L_1 \cap L_2 \cap L_3) = P(L_1) \cdot P(L_2 | L_1) \cdot P(L_3 | L_1 \cap L_2) = \left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{8}\right) = \frac{1}{6}$

b) $P(\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2 \cap \bar{L}_3) = P(\bar{L}_1) \cdot P(\bar{L}_2 | \bar{L}_1) \cdot P(\bar{L}_3 | \bar{L}_1 \cap \bar{L}_2) = \left(\frac{4}{10}\right)\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{2}{8}\right) = \frac{1}{30}$

c) $P(\bar{L}_1 \cap L_2 \cap L_3) + P(L_1 \cap \bar{L}_2 \cap L_3) + P(L_1 \cap L_2 \cap \bar{L}_3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

d) ??? (la soluzione è 97%)

16 – Indipendenza e fortuna… Unità n° 09

L'indipendenza è una condizione forte che talvolta sembra porsi contro il senso comune

Gennaro è un affezionato del 12 sulla ruota di Napoli. Indichiamo con E_i l'evento "Esce il 12 nella estrazione i-esima": nel lotto, in ogni nuova "estrazione", si ha che $P(E_i) = 1/90$

Non si ha motivo di dubitare dell'onestà delle estrazioni. Supponiamo che il 12 non è uscito per 150 estrazioni: che probabilità ha di uscire alla 151a?

$$P\left(E_{151} | \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \ldots \cap \bar{E}_{150}\right) = \frac{P\left(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \ldots \cap \bar{E}_{150} \cap E_{151}\right)}{P\left(\bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \ldots \cap \bar{E}_{150}\right)} = P\left(E_{151}\right)$$

È evidente che la probabilità è la stessa non solo dopo 10, 100, 1000 estrazioni, ma che non c'è sequenza di ritardi che possa mai "provocare" l'uscita del 12

Attenzione! Questo non significa che il 12 non uscirà, ma solo l'assenza di raziocinio nell'idea che la propensione ad uscire aumenti con il ritardo

17 – Probabilità condizionate e dati osservati

E' possibile calcolare le probabilità condizionate anche a partire da dati osservati. Riprendiamo l'esempio sull'acquisto della TV:

Acquisto Pianificato	Acquisto Effettuato		Totale
	SI	NO	
SI	200	50	250
NO	100	650	750
Totale	300	700	1000

Qual è la probabilità di effettuare l'acquisto nei 12 mesi dato che è stato pianificato?

P(acquisto effettuato | acquisto pianificato) =

$$= \frac{\text{n° soggetti che hanno pianificato ed effettuato l'acquisto}}{\text{n° totale di soggetti che hanno pianificato l'acquisto}} = n_{11}/n_{1.}$$

Abbiamo detto che calcolare la probabilità condizionata significa "riscalare" la probabilità relativa all'evento dipendente

P(acquisto effettuato | acquisto pianificato) =

= P(a. effettuato e pianificato) / P(a. pianificato) =

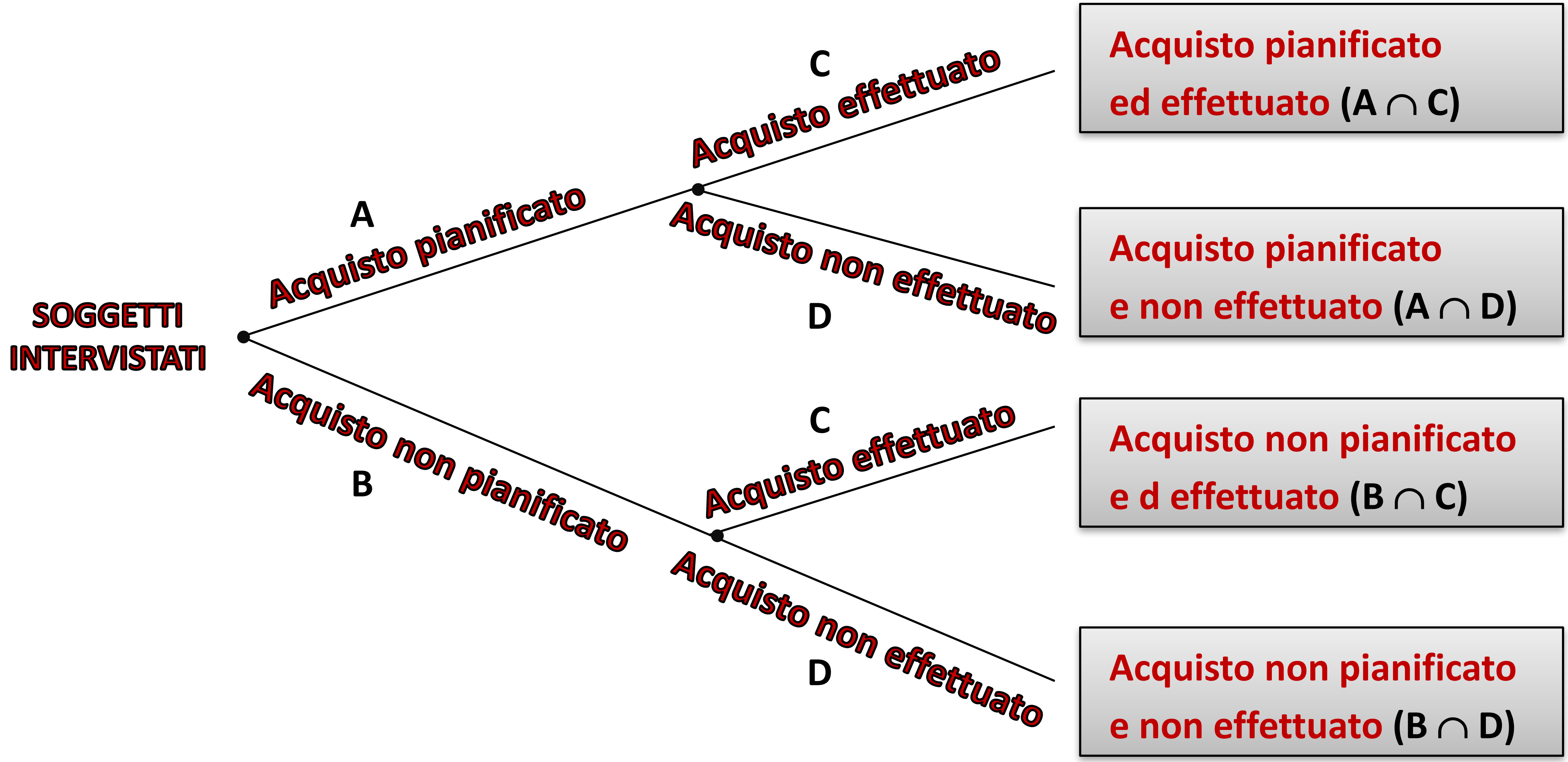
$= (n_{11} / n)/(n_{1.} / n) = (200/1000)/(250/1000)=200/250$

La probabilità che un soggetto abbia acquistato una nuova TV dato che aveva pianificato l'acquisto è pari a 0,8 (80%)

Qual è la probabilità di aver effettuato l'acquisto dato che non era stato pianificato?

Qual è la probabilità di non aver effettuato l'acquisto dato che era stato pianificato?

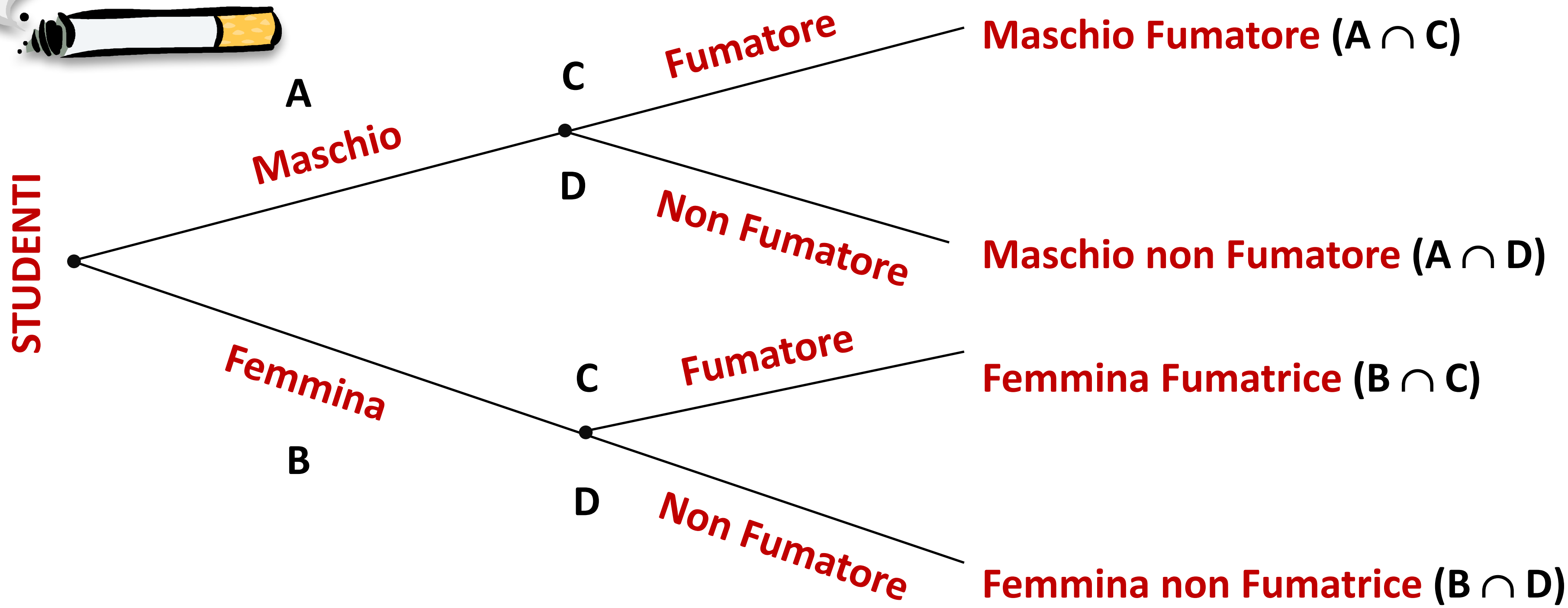
Leggere la tabella può rivelarsi talvolta complicato, e allo stesso tempo è facile confondere i diversi eventi. Un modo alternativo di rappresentare i dati è il cosiddetto albero delle decisioni



20 – Esempio

Ad un gruppo di 173 studenti, suddiviso per genere, è stato chiesto qual è il loro atteggiamento verso il fumo

	Maschi	*Femmine*	*Totale*
Fumatore	16	19	35
Non Fumatore	80	58	138
Totale	96	77	173



21 – Risoluzione di problemi con la probabilità

Nella risoluzione di problemi in condizioni di incertezza è necessario seguire alcuni passi:

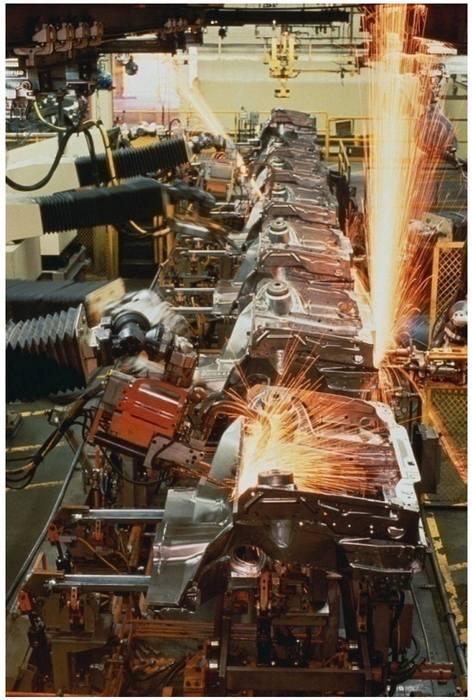
1) individuare i dati del problema e tradurli in simboli

2) delimitare le richieste del problema ed esprimerle in simboli

3) applicare le regole del calcolo delle probabilità

Da un controllo di qualità su un lotto di componenti elettroniche prodotte in un impianto si è rilevato che:
1) il 20% delle componenti è difettoso
2) il 90% delle componenti passa il controllo
3) i prodotti privi di difetti passano il test nel 95% dei casi

Qual è la probabilità che una componente non risulti difettosa una volta superato il controllo?



Poniamo A = *la componente è difettosa* e B = *la componente passa il test*

Il problema ci suggerisce i seguenti dati

$$1)\ P(A)=0{,}20 \qquad 2)\ P(B)=0{,}90 \qquad 3)\ P\left(B\,|\,\bar{A}\right)=0{,}95$$

Vogliamo calcolare P(A|B), probabilità che la componente non sia difettosa dato che ha passato il test. Dalle probabilità composte ricaviamo l'espressione seguente:

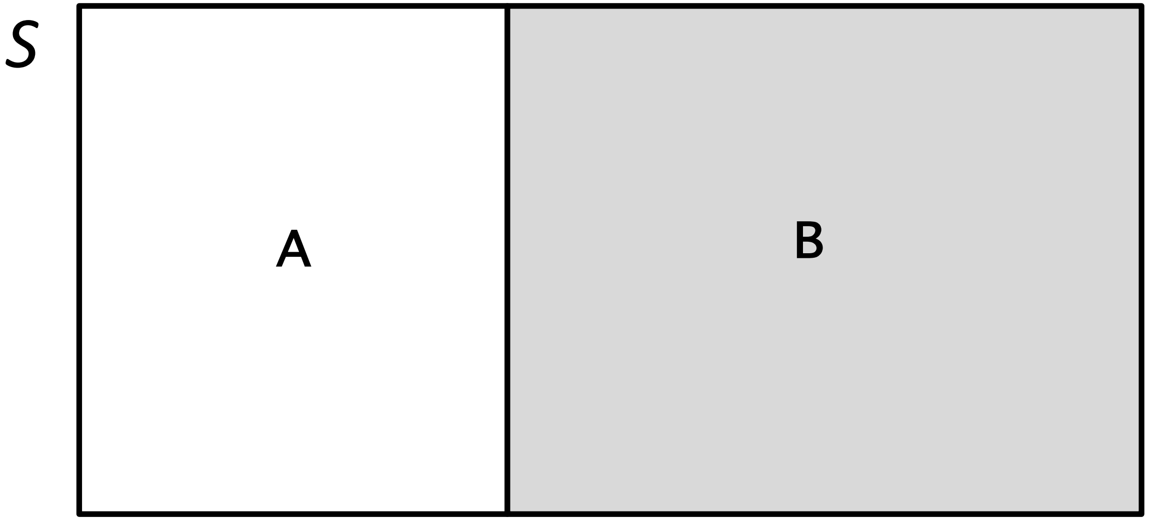
$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(A\right)}{P\left(B\right)}P\left(B|A\right)$$

consente di scambiare il ruolo degli eventi tra condizionato e condizionante

$$P\left(\bar{A}|B\right)=\frac{P\left(\bar{A}\right)}{P\left(B\right)}P\left(B|\bar{A}\right)=\frac{\left[1\text{-}P\left(A\right)\right]}{P\left(B\right)}P\left(B|\bar{A}\right)=\frac{0{,}8\cdot 0{,}95}{0{,}9}=0{,}8444$$

23 – Eventi necessari e partizioni

Se in un esperimento due eventi sono tali per cui almeno uno dei due si verifica, si dicono necessari



Esempio: *testa o croce*

Gli eventi $H_1, \ldots, H_k$ formano una partizione dello spazio campionario se:

(1) $H_i \cap H_j = \varnothing \quad \forall\, i \neq j = 1, \ldots, k$

(2) $\bigcup_{j=1}^{k} H_j = \Omega$

cioè se sono a due a due incompatibili e necessari

24 – Spazio campionario e partizioni

Consideriamo una partizione dello spazio campionario:

$$H_1, H_2, \dots, H_k$$

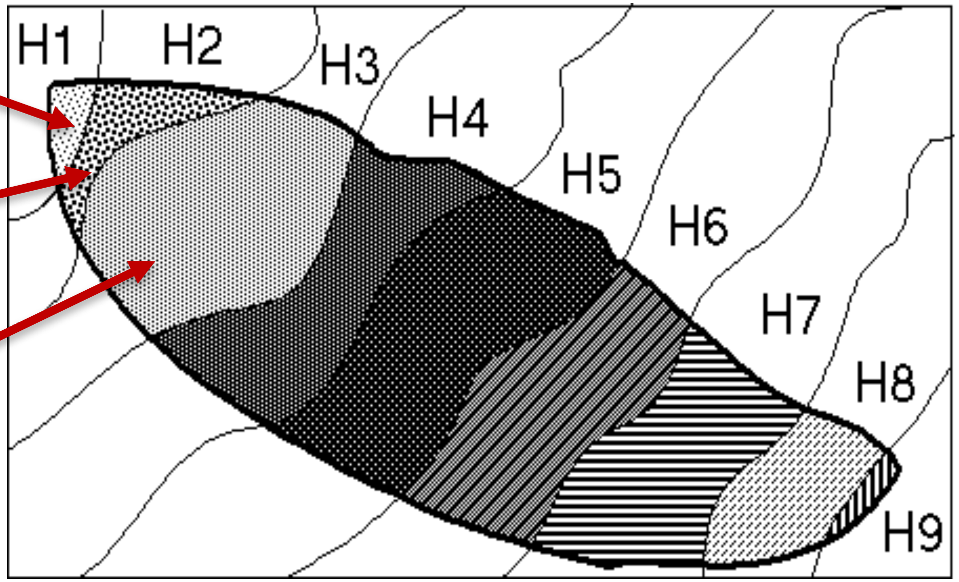
Consideriamo adesso un altro evento E appartenente allo stesso spazio: per le proprietà degli eventi possiamo scrivere

$$E = E \cap \Omega = E \cap (H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_k) = (E \cap H_1) \cup (E \cap H_2) \cup \dots \cup (E \cap H_k)$$

$E \cap H_1$

$E \cap H_2$

$E \cap H_3$



$$H_i \cap H_j = \varnothing$$

$$\bigcup_{j=1}^{k} H_j = \Omega$$

Calcoliamo adesso la probabilità dell'evento E così come l'abbiamo definito

$$P(E) = P(E \cap \Omega) = P[E \cap (H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k)] =$$

$$= P(E \cap H_1) + P(E \cap H_2) + \ldots + P(E \cap H_k) =$$

$$= \boxed{P(E|H_1)P(H_1) + P(E|H_2)P(H_2) + \ldots + P(E|H_k)P(H_k)}$$

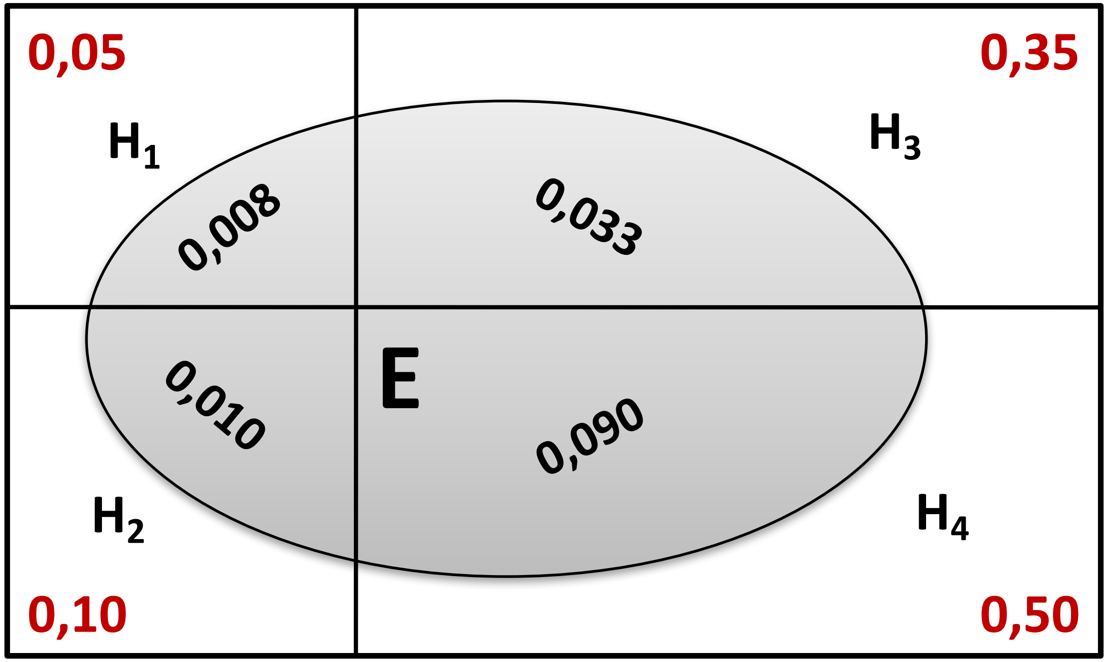
formula di disintegrazione

La probabilità dell'evento E può essere calcolata, avendo a disposizione una partizione dello spazio campionario, come una somma PONDERATA di probabilità condizionate di E rispetto agli eventi H. In pratica?

Supponiamo di avere due urne: in A_1 ci sono 30 biglie nere e 70 bianche, in A_2 ci sono 80 biglie bianche e 20 nere. Si estrae a caso un'urna e da questa si estrae una pallina:

ammesso che la pallina estratta sia nera, ci si chiede qual è la probabilità che essa provenga dall'urna A_1 se la probabilità di selezionare ciascuna delle urne è di 0,5?

26 – Partizioni e diagrammi di Venn



Consideriamo le seguenti probabilità

$P(H_1) = 0{,}05$ $\quad P(E \cap H_1) = 0{,}008$

$P(H_2) = 0{,}10$ $\quad P(E \cap H_2) = 0{,}010$

$P(H_3) = 0{,}35$ $\quad P(E \cap H_3) = 0{,}033$

$P(H_4) = 0{,}50$ $\quad P(E \cap H_4) = 0{,}090$

$P(E) = 0{,}141$

$$E = (E \cap H_1) \cup (E \cap H_2) \cup (E \cap H_3) \cup (E \cap H_4)$$

$$P(E) = P(E \cap H_1) + P(E \cap H_2) + P(E \cap H_3) + P(E \cap H_4) =$$
$$= P(E|H_1)P(H_1) + P(E|H_2)P(H_2) + P(E|H_3)P(H_3) + P(E|H_4)P(H_4)$$

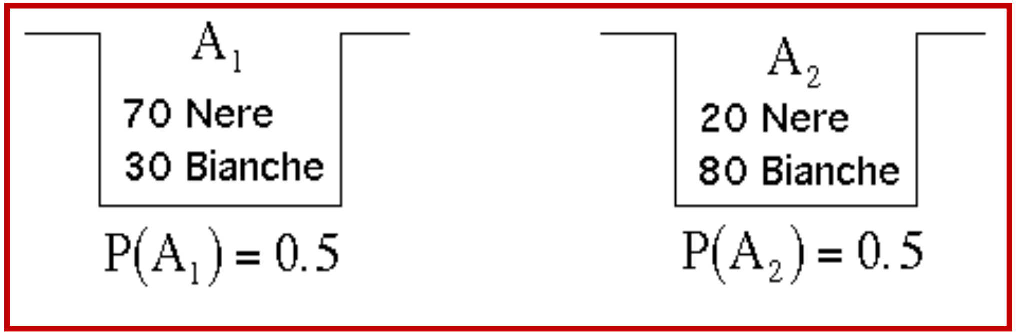
27 – Causa ed effetto

Simili problemi si presentano ogni qual volta un evento E può essere visto come il risultato (EFFETTO) di uno tra k possibili eventi (CAUSE) H_1, H_2, …, H_k, e interessa valutare la probabilità che, dato E, sia H_j la causa che lo ha prodotto

ESEMPIO

1) si sceglie a caso l'urna
2) si scegli a caso la biglia

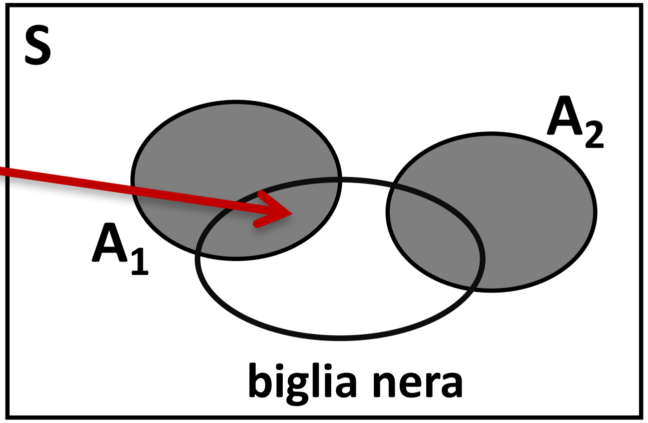
È stata estratta una biglia nera: da dove proviene?



La probabilità assegnata ad A_1 e A_2 prima dell'esperimento è detta A PRIORI

Come si modifica la probabilità alla luce del fatto è stata scelta una biglia nera?

$$P(A_1|N) = \frac{P(A_1 \cap N)}{P(N)} = \frac{0,35}{0,45} = 0,78$$



La probabilità dell'evento dopo il verificarsi di un altro è detta A POSTERIORI

28 – Il teorema di Bayes

Dato l'evento (effetto) E qual è la probabilità che sia H_j la causa che lo ha prodotto?

Thomas Bayes

Probabilità *a posteriori*

Probabilità *a priori*

$$\boxed{P(H_j|E)} = \frac{P(H_j \cap E)}{P(E)} = \frac{\boxed{P(H_j)}P(E|H_j)}{\sum_{j=1}^{k} P(H_j)\boxed{P(E|H_j)}}$$

Verosimiglianza o prob. probativa

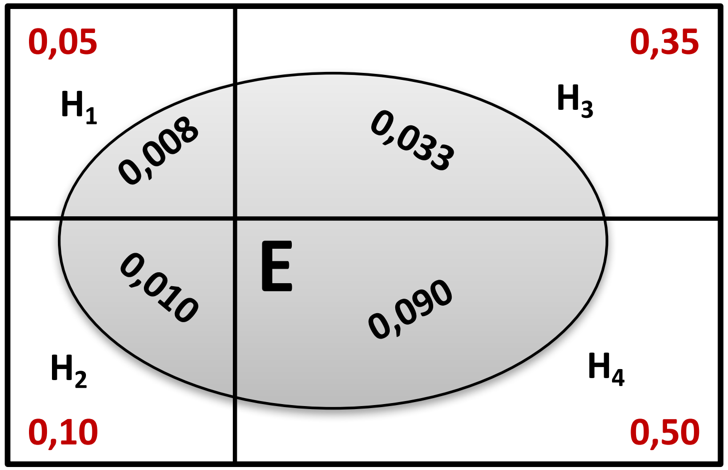
(che una certa causa ha prodotto un effetto)

Dato che ho estratto una biglia nera con che probabilità proviene dall'urna A_1?

$$P(A_1|N) = \frac{P(A_1 \cap N)}{P(N)} = \frac{P(A_1)P(N|A_1)}{\sum_{j=1}^{2} P(A_j)P(N|A_j)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}7}{0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}2}$$

29 – Bayes e diagrammi di Venn

Ritorniamo al caso illustrato con i diagrammi di Venn e determiniamo la causa più probabile che ha determinato l'evento E



$$P(H_1|E) = \frac{0{,}05}{0{,}141} = 0{,}06 \qquad P(H_2|E) = \frac{0{,}10}{0{,}141} = 0{,}07$$

$$P(H_3|E) = \frac{0{,}35}{0{,}141} = 0{,}23 \qquad P(H_4|E) = \frac{0{,}50}{0{,}141} = 0{,}64$$

La causa più probabile è H_3 come il diagramma mostra con chiarezza: se in una scommessa tutti gli eventi dessero luogo alla stessa vincita, la logica ci imporrebbe di scegliere H_3

Nella formula di Bayes il denominatore è costante per cui spesso si scrive

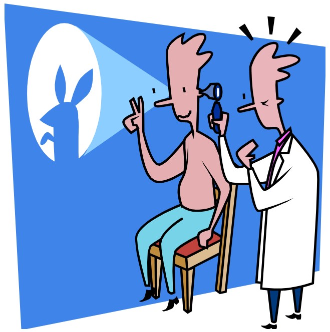
$$P(H_i|E) = \frac{P(H_i)P(E|H_i)}{P(E)} \propto P(H_i)P(E|H_i)$$

La probabilità finale è proporzionale a quella iniziale con un fattore di proporzionalità detto VEROSIMIGLIANZA, probabilità che si verifichi E sotto H_i

Il teorema di Bayes può essere visto come uno strumento per mezzo del quale è possibile correggere le *informazioni iniziali* $P(H_j)$ sulla base delle *osservazioni sperimentali* $P(E|H_j)$, ottenendo "per correzione" la *probabilità finale* $P(H_j|E)$

quanto più la probabilità a posteriori è diversa da quella a priori, tanto più la verosimiglianza ha modificato le informazioni iniziali

Supponiamo che un individuo sostenga una certa visita medica: il medico già prima della visita ha qualche idea di quale malattia il paziente potrebbe avere…



Queste idee più o meno vaghe possono essere rappresentate come una opinione iniziale che il paziente abbia una certa malattia

Nel corso della visita il paziente descrive al medico i propri sintomi, è sottoposto ad alcune analisi, e tutto ciò fornisce nuove informazioni: a questo punto il medico può modificare la propria idea in base alle informazioni acquisite e quindi ottenere una opinione finale

31 – Esempio

Il centralino di una grande azienda ha tre diverse linee telefoniche (A, B e C) che risultano libere rispettivamente con una probabilità del 60%, 30% e 75% Contattando l'azienda la probabilità che la chiamata sia smistata su una delle tre linee è la stessa:

1) Qual è la probabilità di trovare la linea libera?
2) La linea è libera. Qual è la probabilità che abbiano risposto dalla linea C?

Che informazioni iniziali abbiamo? $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3 \ (\cong 0{,}33)$
Che informazioni aggiuntive abbiamo? $P(L|A) = 0{,}60 \quad P(L|B) = 0{,}30 \quad P(L|C) = 0{,}75$

1) $P(L) = P(L|A) \cdot P(A) + P(L|B) \cdot P(B) + P(L|C) \cdot P(C) = 0{,}60/3 + 0{,}30/3 + 0{,}75/3 = 0{,}55$

2) $P(C|L) = P(C \cap L)/P(L) = [P(L|C) \cdot P(C)] \ / \ P(L) = 0{,}25/0{,}55 \cong 0{,}45$

$P(A|L) = P(A \cap L)/P(L) = [P(L|A) \cdot P(C)] \ / \ P(L) = 0{,}20/0{,}55 \cong 0{,}36$

$P(B|L) = P(B \cap L)/P(L) = [P(L|B) \cdot P(C)] \ / \ P(L) = 0{,}10/0{,}55 \cong 0{,}18$

32 – Esempio (2)

Da uno studio sulla popolazione italiana sappiamo che il 20% delle ragazze ha i capelli biondi, il 40% i capelli castani, il 25% i capelli neri e il 15% i capelli rossi. Sappiamo poi che ha gli occhi azzurri il 45% delle bionde, il 20% delle castane, il 10% delle nere e il 5% delle rosse. Conosco una ragazza in chat e mi dice che ha gli occhi azzurri: che probabilità ho che sia bionda?

Che informazioni iniziali abbiamo?

$P(B) = 0,20 \quad P(C) = 0,40 \quad P(N) = 0,25 \quad P(R) = 0,15$

Che informazioni aggiuntive abbiamo?

$P(A|B) = 0,45 \quad P(A|C) = 0,20 \quad P(A|N) = 0,10 \quad P(A|R) = 0,05$

1) $P(A) = P(A|B)\cdot P(B) + P(A|C) \cdot P(C) + P(A|N) \cdot P(N) + P(A|R) \cdot P(R) =$
$= (0,20 \cdot 0,45) + (0,40 \cdot 0,20) + (0,25 \cdot 0,10) + (0,15 \cdot 0,05) = 0,2025$

2) $P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) = [P(A|B) \cdot P(B)] / P(A) = [0,20 \cdot 0,45] / 0,2025 \cong 0,44$

N.B. Sia le probabilità iniziali che le probabilità finali devono complessivamente essere uguali a 1

Supponiamo di doverci sottoporre ad un test per una certa malattia

P (virus) = 0,001
P (no virus) = 0,999 → **probabilità a priori** (prima di aver sostenuto il test)

Il test prevede 2 soli risultati: + / −

P (+ | virus) = 0,98
P (− | virus) = 0,02 → probabilità dei 2 possibili risultati nel caso di persona **malata**

P (+ | no virus) = 0,03
P (− | no virus) = 0,97 → probabilità dei 2 possibili risultati nel caso di persona **sana**

Il risultato del test è + → devo preoccuparmi ?

34 – Soluzione

La probabilità di essere malato dato un risultato + del test è:

$$P(\text{virus} \mid +) = \frac{P(+ \mid \text{virus})\, P(\text{virus})}{P(+ \mid \text{virus})\, P(\text{virus}) + P(+ \mid \text{no virus})\, P(\text{no virus})} =$$

$$= \frac{0{,}98 \times 0{,}001}{0{,}98 \times 0{,}001 + 0{,}03 \times 0{,}999} = 0{,}032$$

Sorprendente? NO
la probabilità a priori
è molto piccola (0,1%)

… e la probabilità di essere malato dato un risultato – ?

$$P(\text{virus} \mid -) = \frac{P(- \mid \text{virus})\, P(\text{virus})}{P(- \mid \text{virus})\, P(\text{virus}) + P(- \mid \text{no virus})\, P(\text{no virus})} =$$

$$= \frac{0{,}02 \times 0{,}001}{0{,}02 \times 0{,}001 + 0{,}97 \times 0{,}999} \cong 2{,}1 \times 10^{-5}$$

Quindi il test
è affidabile

Corso di Laurea: Economia Aziendale

Insegnamento: Statistica (9 CFU)

Docente: M.Misuraca (aula1) / D.Costanzo (aula2)

35 – Albero delle decisioni

Unità n° 09

Anche in questo caso possiamo utilizzare l'albero delle decisioni, stando però bene attenti a come leggiamo i diversi dati a disposizione