01 – Introduzione Unità n° 10

Associare una misura di probabilità al verificarsi di un evento (come esito di un esperimento) non sempre è sufficiente a risolvere gran parte dei problemi reali con connotati di incertezza

Talvolta studiando un certo fenomeno aleatorio si è più interessati a una qualche *funzione* dei possibili esiti piuttosto che agli esiti stessi

***Consideriamo un esperimento dato dal lancio di due dadi*:**

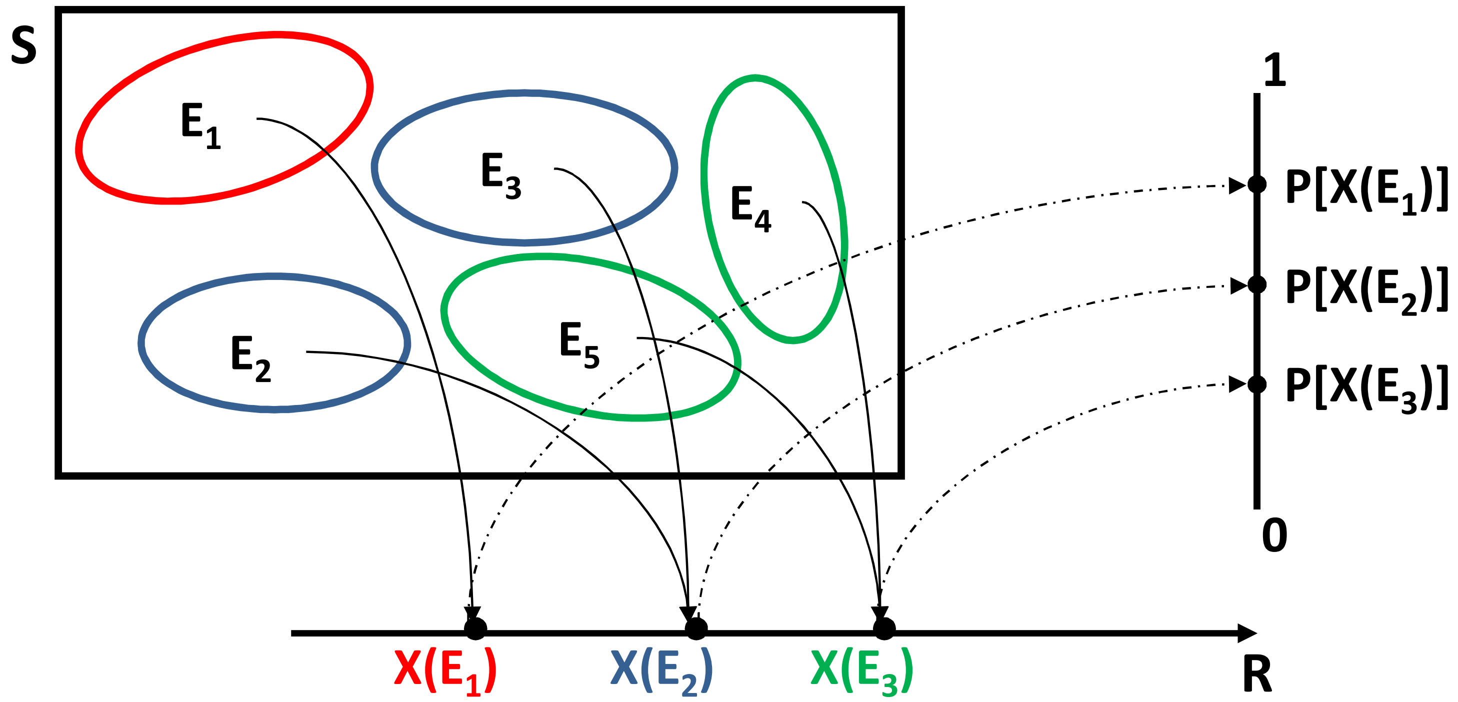
E' possibile calcolare, ad esempio, la probabilità che la somma delle due facce sia un numero pari, o un numero dispari, o sia esattamente uguale a sette, e così via...

Possiamo considerare tutti i possibili risultati del lancio dei due dadi allo stesso tempo?

E' NECESSARIO RICORRERE ALLE VARIABILI CASUALI

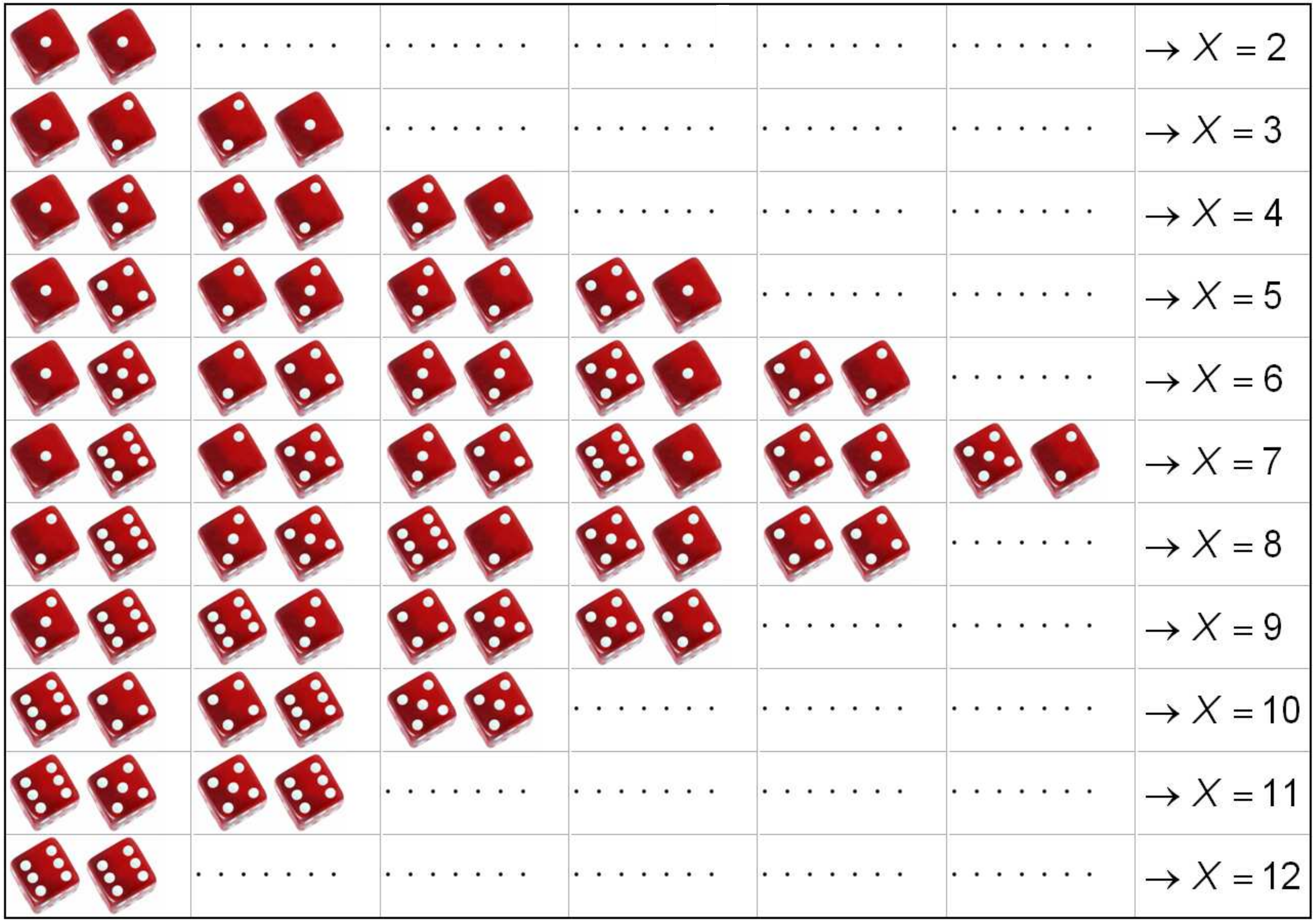
02 – Le variabili casuali

Una ***variabile causale*** (o aleatoria) è una variabile che assume valori numerici in corrispondenza dei diversi risultati di un esperimento casuale (o aleatorio)



Una variabile casuale X è quindi una funzione, definita sullo spazio campionario S, che associa ad ogni evento $E \subset S$ un unico numero reale

Corrispondenza tra eventi e valori della v. casuale X "somma dei punteggi" nel lancio di due dadi



04 – Esempio (1)

***Consideriamo un esperimento casuale dato dal lancio di tre monete*. Lo spazio campionario è dato da:**

$$S = \begin{Bmatrix} E_1 = CCC & E_2 = CTT & E_3 = CCT & E_4 = TCC \\ E_5 = TCT & E_6 = CTC & E_7 = TTC & E_8 = TTT \end{Bmatrix}$$

Se consideriamo l'evento E_2 e vogliamo costruire la var. casuale *"n° di teste uscite nel lancio di tre monete"* allora avremo

$$E_2 = C \cap T \cap T \longrightarrow X = 2$$

Anche per E_5 e E_7 si ha X = 2, quindi si può scrivere la probabilità di ottenere 2 teste come

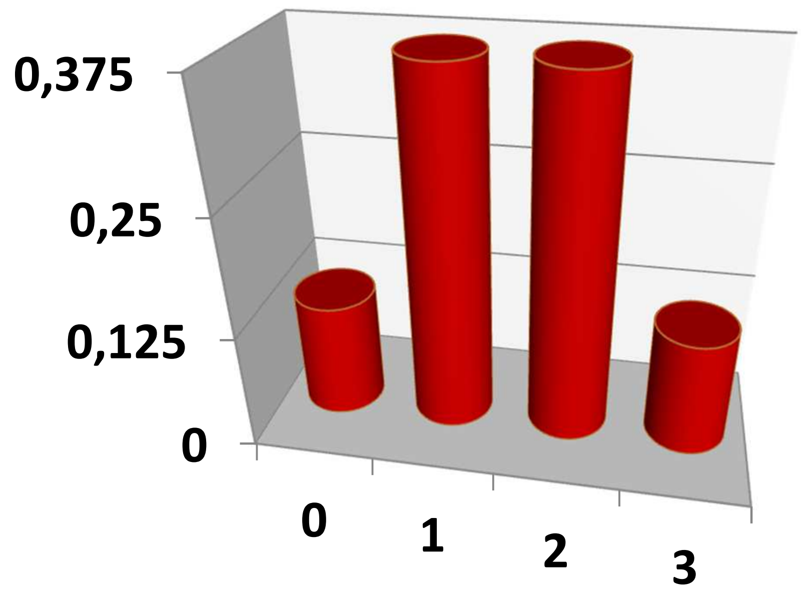
$$P(X = 2) \Rightarrow E_2 \cup E_5 \cup E_7 \Rightarrow P(E_2) + P(E_5) + P(E_7) = 3/8$$

Il valore assunto da X non è noto a priori e perciò è detta variabile casuale

Deriviamo ora la distribuzione di probabilità della variabile X:

$E_1 = C \cap C \cap C$
$E_2 = C \cap T \cap T$
$E_3 = C \cap C \cap T$
$E_4 = T \cap C \cap C$
$E_5 = T \cap C \cap T$
$E_6 = C \cap T \cap C$
$E_7 = T \cap T \cap C$
$E_8 = T \cap T \cap T$

X	P(x)
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8
	1



06 – Variabili casuali discrete e continue — Unità n° 10

È possibile distinguere due diversi tipi di variabili casuali, a seconda di come si sceglie $A \subseteq IR$:

- una v. casuale **discreta** può assumere valori in un sottoinsieme discreto dei numeri reali
- una v. casuale **continua** può assumere tutti i valori compresi in un intervallo reale

ESEMPI

1. N° di pezzi difettosi in un campione di 20 pezzi estratti da un certo lotto
2. N° di clienti che arrivano in un'ora, alla cassa di un supermarket
3. N° di richieste d'indennizzo, in un anno, relative ad una certa polizza

1. Reddito annuo di una famiglia
2. Quantità di petrolio importata in Italia in un certo mese
3. Variazione del prezzo di un'azione o di un indice di borsa telematico
4. Utili di una certa azienda o società

In generale, una volta stabilita qual è la natura della var. casuale e la corrispondente legge di probabilità, si procede all'analisi dei diversi esiti d'interesse per il fenomeno oggetto di studio e al calcolo della probabilità associata

Una v. casuale discreta è nota attraverso la sua distribuzione di probabilità, formata da tutti i valori possibili e dalle probabilità loro associate

(1) Una variabile casuale X è discreta se può assumere solo un numero finito di valori

ES. n° di teste risultanti da 10 lanci di una moneta

(2) Una variabile casuale X è discreta anche quando il numero di possibili risultati è infinito ma numerabile

ES. n° di lanci necessari per osservare testa per la prima volta

$P(X=x_i)$ → Probabilità che la v.c. X assuma il valore x_i

La ***funzione di probabilità*** di una variabile casuale discreta X associa ad ognuno dei possibili valori x_i la corrispondente probabilità $P(X=x_i)$

Valgono le seguenti due proprietà:

1) $\sum P(x_i) = 1$ 2) $P(x_i) \geq 0$

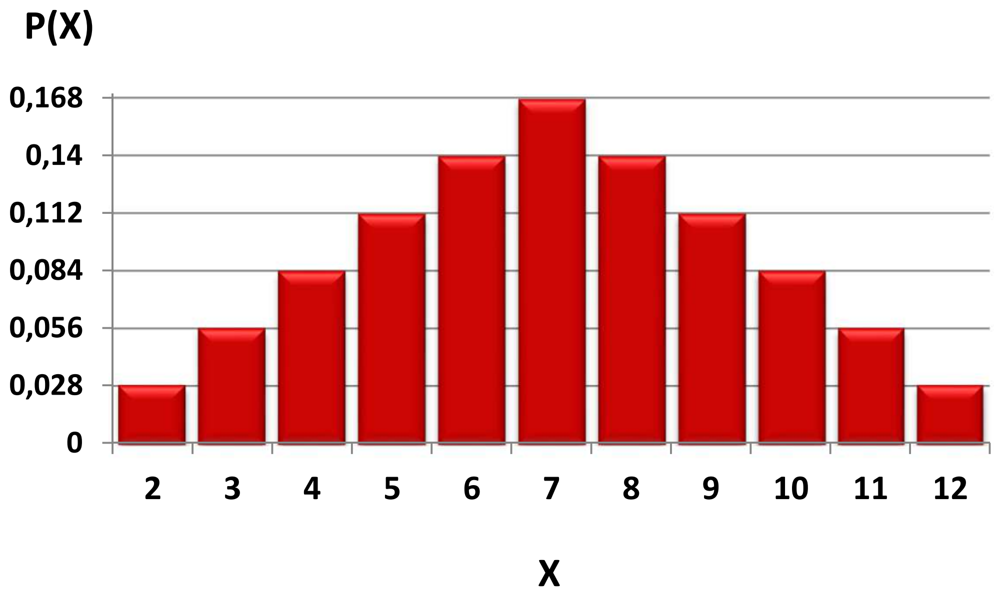
IMPORTANTE

Dal punto di vista della notazione si utilizzano le lettere maiuscole per indicare la v.c. (es. X) e la corrispondente lettera minuscola (es. x) per indicare una sua realizzazione

Associando a ciascun valore della variabile casuale la probabilità corrispondente si ottiene la distribuzione di probabilità:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

È interessante osservare come i possibili risultati della prova siano 36 mentre la v. casuale può invece assumere 11 possibili valori distinti



→ **si ha maggiore facilità di trattazione se agli eventi si associano delle quantità numeriche**

$P(X=2) = P[(1,1)] = 1/36$

$P(X=3) = P[(1,2) \text{ o } (2,1)] = 2/36$

La distribuzione di probabilità è la sintesi formale delle probabilità assegnate ai vari elementi dello spazio campionario

Sono evidenti due grandi difficoltà:

- **Nella maggior parte delle situazioni la distribuzione di probabilità è del tutto sconosciuta**
- **Poiché esistono diversi meccanismi di collegamento tra spazio campionario e probabilità, in base a quale criterio scegliere la variabile casuale?**

Uno dei compiti della Statistica è definire modelli di v. casuali e di scegliere quello più adatto alla particolare situazione di studio

funzione di distribuzione teorica → $f_i = \text{funzione}(i,\text{parametri})\ \forall\, i$

E' una rappresentazione semplificata e astratta delle osservazioni effettuate:

- ***astratta*** **- non esiste in realtà e non è proposta in forma fisica o analogica (le modalità derivano da una funzione matematica e non sono stati effettivamente osservate)**
- ***semplificata*** **- in essa non confluisce tutto ciò che conosciamo o apprendiamo dai dati, ma solo ciò che riteniamo rilevante**

11 – Esempio

In una impresa che ha il 70% di personale di genere maschile si scelgono a caso (con ripetizione) due persone per una commissione. Il numero di donne nella commissione è una v. casuale X

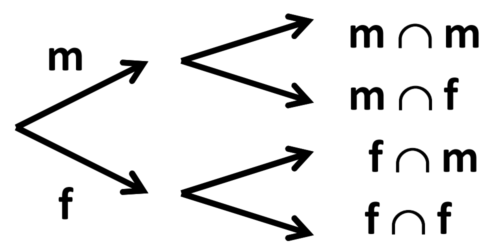
possibili risultati

(f,f) (f,m) (m,f) (m,m)

valori della v. casuale

$$X = \begin{cases} 0 \text{ se } (m,m) \\ 1 \text{ se } (f,m) \text{ oppure } (m,f) \\ 2 \text{ se } (f,f) \end{cases}$$

albero delle probabilità

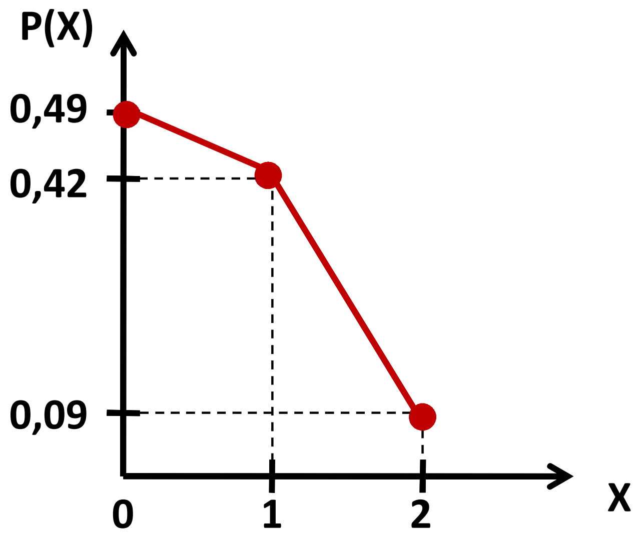


Poiché la scelta del secondo componente è indipendente dalla scelta del primo si applica il teorema delle probabilità composte

evento (E)	X	P(E)
(m,m)	0	$0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$
(f ,m)	1	$0{,}3 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$
(m,f)	1	$0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$
(f ,f)	2	$0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$
		1,00

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

x	P(X=x)
0	0,49
1	0,42
2	0,09
	1,00



12 – Funzione di ripartizione Unità n° 10

Quando si è interessati alle probabilità cumulate, ossia alla probabilità che la v. casuale X assuma un valore minore o uguale ad un dato valore x_i si introduce la ***funzione di ripartizione***

Data una v.c discreta X, la funzione che fa corrispondere ai valori x le probabilità cumulate

$$P\left(X \leq x_k\right)$$

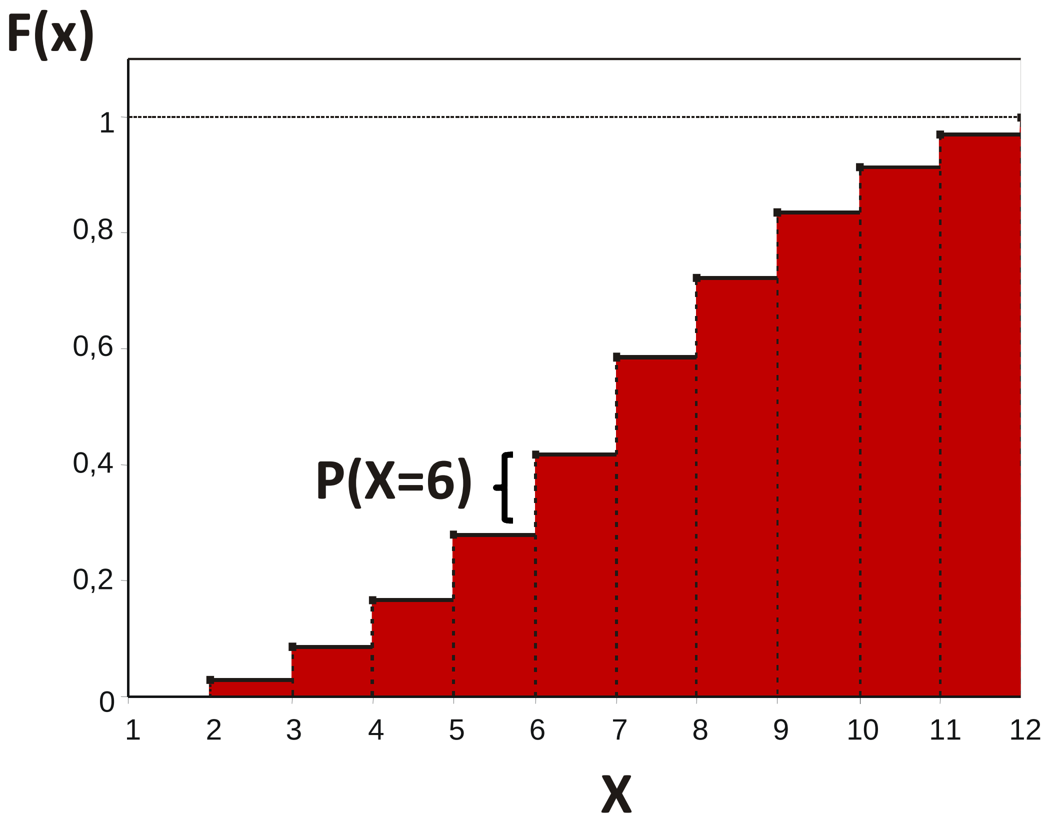
viene detta funzione di ripartizione ed indicata con

$$F\left(x_k\right) = P\left(X \leq x_k\right) = P(x_1) + \ldots + P(x_k) = \sum_i P\left(X = x_i\right)$$

ESEMPIO
Lancio di due dadi

x	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
P(x)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
F(x)	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	**1**

13 – Rappresentazione grafica e proprietà



L'altezza di ciascun gradino è esattamente pari alla probabilità che la X assuma un dato valore:

$$F(x_{i+1}) - F(x_i) = P(X \leq x_{i+1}) - P(X \leq x_i) = P(X = x_{i+1})$$

Tipicamente, la funzione di ripartizione di una variabile casuale discreta ha una forma detta "a gradini"

(1)

È ancora una probabilità quindi: $0 \leq F(x) \leq 1$

(2)

La funzione di ripartizione è non decrescente:

$$\text{se } x_1 \leq x_2 \text{ allora } F(x_1) \leq F(x_2)$$

(3)

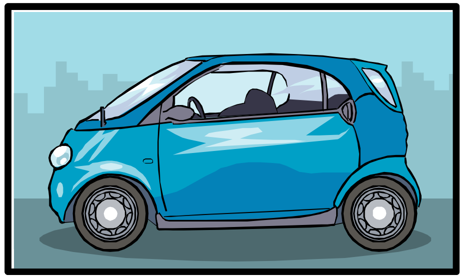
La funzione di ripartizione è continua a destra:

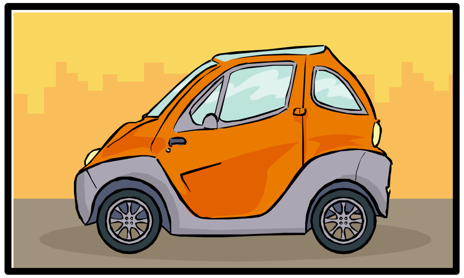
$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

La continuità a destra significa che la funzione rimane costante per tutti i valori più grandi di X fino a che non si cambia valore

Basandosi sulle vendite degli anni precedenti il direttore di una concessionaria sa che ogni giorno, il n° di auto vendute per una certa categoria varia tra 0 e 5. Come si può usare la funzione di probabilità per pianificare le scorte?

X	P(X)	F(X)
0	0,15	0,15
1	0,30	0,45
2	0,20	0,65
3	0,20	0,85
4	0,10	0,95
5	0,05	1,00





Se nel salone ci sono 4 auto la concessionaria potrà soddisfare il 95% delle richieste dei clienti mentre se ce ne sono 2 solo il 65%

15 – Sintesi delle variabili casuali discrete

Si può ricondurre una v.c. a pochi parametri descrittivi delle sue caratteristiche principali:

CENTRALITA' **VARIABILITA'** **SIMMETRIA**

L'idea è che il verificarsi di alcuni eventi (con una certa probabilità) risulta legato ad aspetti comprensibili e noti della variabile

Valore atteso di una v. casuale

$$E(X) = \mu = \sum_i x_i \cdot P(x_i)$$

Varianza di una v. casuale

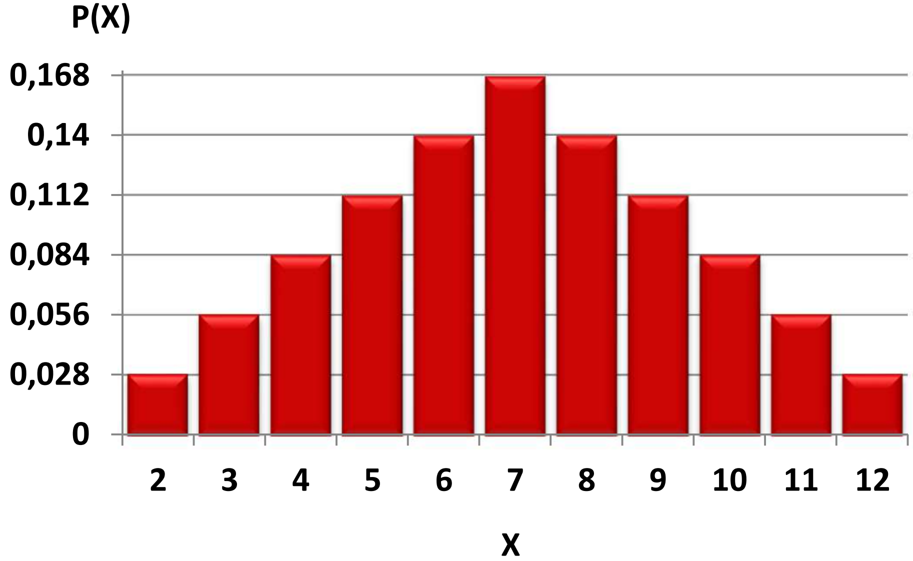
$$VAR(X) = \sigma^2 = \sum_i \left[x_i - E(X)\right]^2 \cdot P(x_i)$$

Il valore atteso di una v. casuale X dipende unicamente dalla sua funzione di probabilità: se due variabili X e Y hanno la stessa funzione di probabilità avranno anche lo stesso v. atteso

16 – Esempio

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

$$E(X)=2\frac{1}{36}+3\frac{2}{36}+4\frac{3}{36}+5\frac{4}{36}+6\frac{5}{36}+7\frac{6}{36}+8\frac{5}{36}+9\frac{4}{36}+10\frac{3}{36}+11\frac{2}{36}+12\frac{1}{36}=\mathbf{7}$$



Nelle distribuzioni di probabilità simmetriche il valore atteso si trova esattamente al centro della distribuzione: il valore centrale è anche quello più probabile (valore modale)

17 – Alcune considerazioni sul valore atteso

Dall'esame di diversi libri di testo di economia aziendale è stato rilevato che l'81% di tutte le pagine è privo di errori; il 17% ne contiene 1 e il 2% ne contiene 2. Usando la v.c. X per indicare il *n° di errori in una pagina scelta a caso*, la distribuzione di probabilità è:

P(0) = 0,81 P(1) = 0,17 P(2) = 0,02

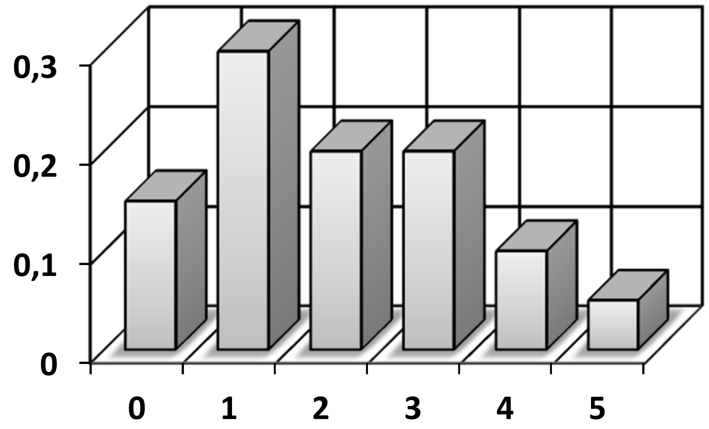
Nel determinare la media di X (n° medio di errori per pag. che ci aspettiamo di trovare) i diversi risultati debbono essere pesati tramite le probabilità del loro verificarsi:

$$(0)(0,81)+(1)(0,17)+(2)(0,02) = \sum_i x_i P(x_i) = E(X) = \mu = 0,21$$

18 – Esercizio

Riprendiamo l'esempio delle automobili: ***basandosi sulle vendite degli anni precedenti il direttore di una concessionaria sa che ogni giorno, il n° di auto vendute varia tra 0 e 5***

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	0,15	0,30	0,20	0,20	0,10	0,05



Calcoliamo il valore atteso e la varianza

$$E(X)=\mu=\sum_i x_i P(x_i)=0\cdot 0,15+1\cdot 0,30+\cdots+5\cdot 0,05=1,95$$

$$V(X)=\sigma^2=\sum_i (x_i-\mu)^2 P(x_i)=\sum_i x^2{}_i P(x_i)-\mu^2=$$

$$(0-1,95)^2\cdot 0,15+(1-1,95)^2\cdot 0,3+\cdots+(5-1,95)^2\cdot 0,05=1,9475$$

19 – Esercizi

Il n° di PC venduti giornalmente in un negozio specializzato è definito dalla seguente distribuzione di probabilità:

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X)	0,05	0,10	0,20	0,20	0,20	0,15	0,10

Trovare: $P(3 \leq x < 6)$; $P(x > 3)$; $P(x \leq 4)$; $P(2 < x \leq 5)$

La compagnia aerea VOLARE ha chiesto ad un consulente di studiare i ritardi dei voli nella settimana prima di Natale, dall'aeroporto di Lamezia. Se la variabile X rappresenta il n° di voli in ritardo in un'ora:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(X)	0,10	0,08	0,07	0,15	0,12	0,08	0,10	0,12	0,08	0,10

Trovare: (a) la FdR (b) la probabilità che il n° di voli in ritardo sia superiore a 5
(c) la probabilità che il n° di voli in ritardo sia tra 3 e 7 (estremi inclusi)

20 – Dal discreto al continuo

Le variabili casuali studiate finora sono caratterizzate dal fatto che possono assumere un numero finito o infinito numerabile di valori, ognuno con una probabilità positiva o nulla

L'insieme dei valori possibili è formato da punti isolati che possono essere "contati", cioè posti in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali

In molti problemi empirici conviene però pensare alla v. casuale come alla realizzazione di un processo continuo: da un punto di vista teorico si suppone che possa assumere ogni possibile valore in un intervallo finito o infinito

Se la v. casuale è continua non è possibile elencare tutte le singole realizzazioni (cioè tutti i valori) perché questi sono una infinità più che numerabile e quindi non si può attribuire una probabilità ai singoli valori

ESEMPIO:

→ la probabilità che oggi la temperatura max sia esattamente 15° è pari a 0

Possiamo però determinare la probabilità per intervalli di valori (probabilità che oggi la temperatura massima sarà tra 15° e 16°)

21 – La variabile casuale continua

Una variabile casuale X si dice *continua* se esiste una funzione non negativa f, definita per ogni $x \in IR$, tale che per ogni sottoinsieme $B \subseteq IR$

$$P\{X \in B\} = \int_B f(x)dx$$

La funzione f è chiamata *funzione di densità di probabilità* di X

PROPRIETA'

Supponiamo che B = [a,b] $\rightarrow$ avremo allora che:

1) $f(X) \geq 0$ per ogni $a \leq X \leq b$

2) $f(x) = 0$ per $(X < a) \cup (X > b)$

3) $P[X \in (-\infty, +\infty)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

ATTENZIONE!

Poiché nel caso delle v. casuali continue la probabilità che la X assuma uno specifico valore è pari a 0 allora le due scritture

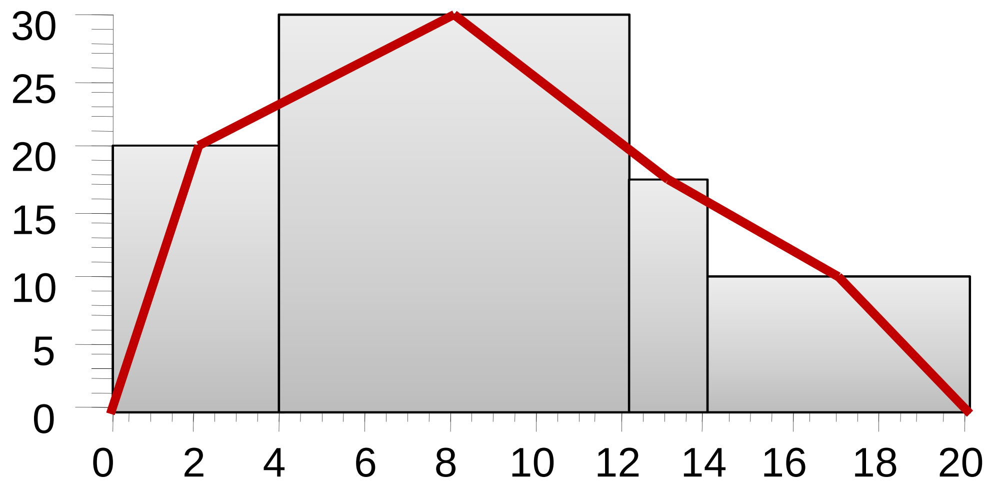
$P(a \leq X \leq b)$ $P(a < X < b)$

sono di fatto equivalenti

22 – Esempio

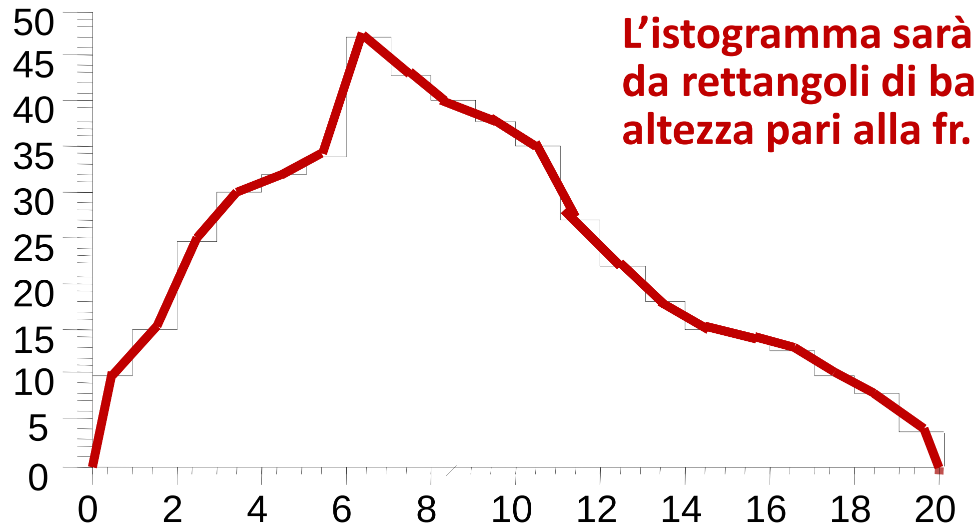
Un campione di schede madri per computer è stato raggruppate in classi annuali di durata:

Durata		Schede	h
0	4	80	20.0
4	12	240	30.0
12	14	35	17.5
14	20	60	10.0
		415	



Suddividiamo ora le classi in sottoclassi di ampiezza unitaria:

Durata		Schede	Durata		Schede
0	1	10	10	11	35
1	2	15	11	12	27
2	3	25	12	13	22
3	4	30	13	14	18
4	5	32	14	15	15
5	6	34	15	16	14
6	7	47	16	17	13
7	8	43	17	18	10
8	9	40	18	19	8
9	10	38	19	20	4
					415



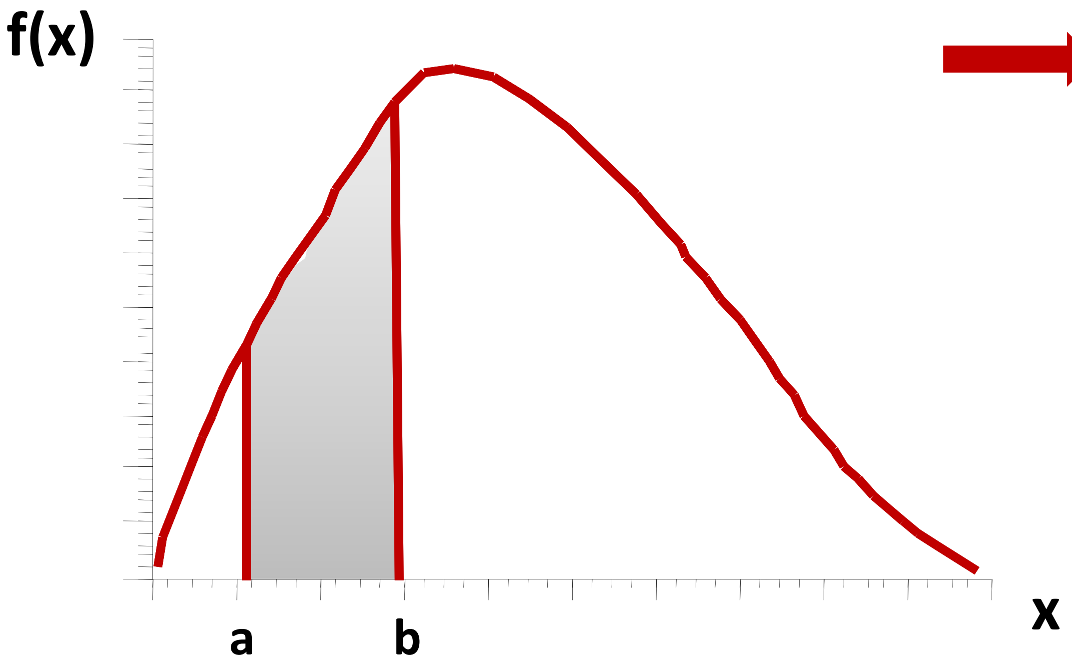
L'istogramma sarà formato da rettangoli di base uno e altezza pari alla fr. relativa

Supponiamo ora di estendere la rilevazione all'infinito, con classi pari ad un infinitesimo dx:

$$[x, \ x + dx]$$

ovvero l'intorno più piccolo diverso dal punto singolo

L'istogramma non è più tracciabile e diventa simile ad un poligono di frequenza



N.B. La f(X) non dà la probabilità di X, ma è proporzionale alla probabilità che X ricada in un intervallo infinitesimale centrato su X

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\mathbf{a} \le \mathbf{X} \le \mathbf{b}\right) = \int_a^b \mathbf{f(x)dx}}$$

24 – Conseguenze della definizione (riepilogo)

(1) La probabilità che la v.c. assuma uno specifico valore è 0

$$P\left(X = x_0\right) = P\left(x_0 \leq X \leq x_0\right) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$$

(2) La probabilità che la v.c. assuma un valore maggiore di una soglia prefissata è data da

$$P\left[\left(X < x_0\right) \cup \left(X \geq x_0\right)\right] = P\left(X < x_0\right) + P\left(X \geq x_0\right) = 1$$

$$\rightarrow \; P\left(X \geq x_0\right) = 1 - P\left(X < x_0\right)$$

25 – Funzione di ripartizione

La definizione di *funzione di ripartizione* per le v.c. continue è simile al caso discreto

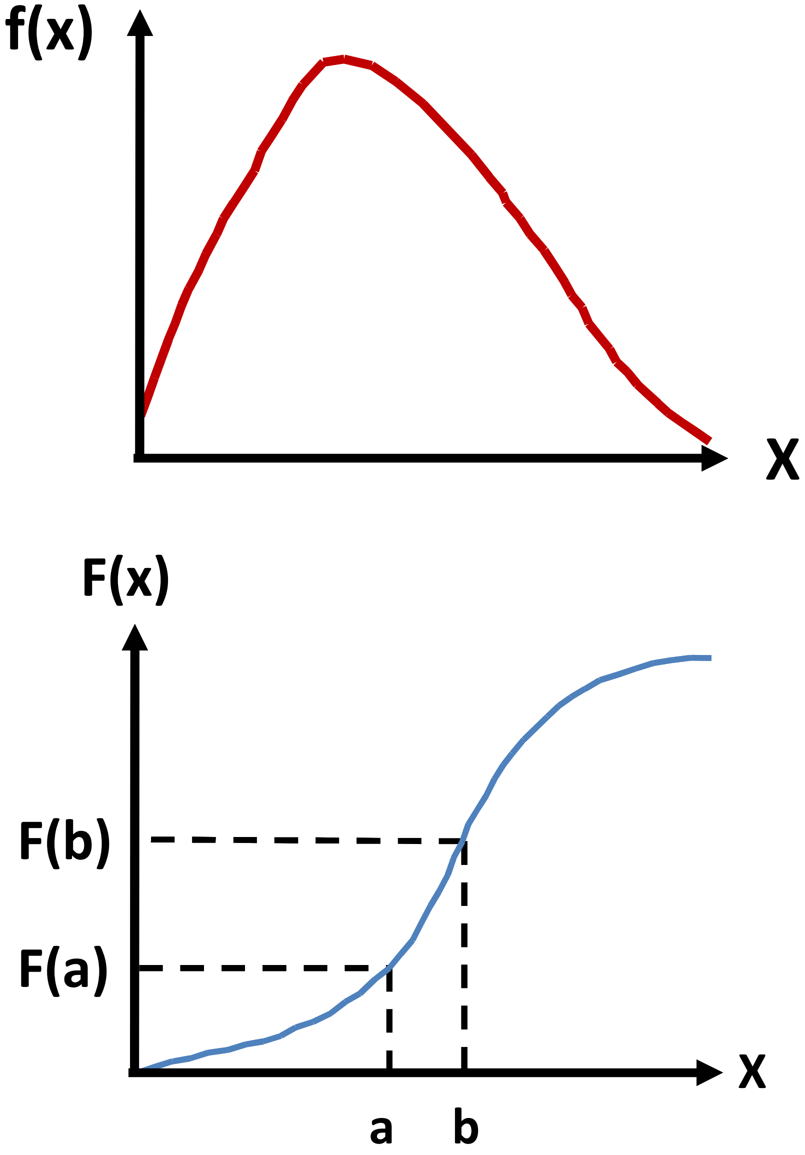
Data una v.c. continua X, la funzione che fa corrispondere ai valori x le probabilità cumulate P(X≤ x) viene detta funzione di ripartizione

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

La FdR può essere usata per calcolare la probabilità di un intervallo: se *a* e *b* sono infatti due possibili valori di X con *a* < *b*, la probabilità che X assuma valori tra *a* e *b* è pari a

$$\rightarrow \quad P(a<X<b) = F(b) - F(a)$$

26 – Proprietà della funzione di ripartizione



Per la funzione di ripartizione delle v. casuali continue valgono le stesse proprietà già viste per le v. discrete:

(1)

In generale $0 \leq F(x) \leq 1$ per ogni $x \in IR$

(2)

La funzione di ripartizione è non decrescente:

$$\text{se } x_1 \leq x_2 \text{ allora } F(x_1) \leq F(x_2)$$

(3)

La funzione di ripartizione è continua a destra:

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

La continuità a destra significa che la funzione rimane costante per tutti i valori più grandi di X fino a che non si cambia valore

27 – Funzione di densità e funzione di ripartizione

In generale abbiamo visto come: $P(x < X < x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x)$

Allo stesso tempo abbiamo $P(x < X < x+\Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt \cong f(x)\Delta x$

$$\Rightarrow F(x+\Delta x) - F(x) \cong f(x)\Delta x \rightarrow \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \cong f(x)$$

Se calcoliamo il limite per Δx allora:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\partial F(X)}{\partial x} \cong f(x)$$

Concettualmente la f. di ripartizione è la derivata prima della funzione di densità

Quindi se conosciamo la funzione di ripartizione non è necessario svolgere l'integrale per poter calcolare la probabilità che la X assuma valori in un certo intervallo

28 – Sintesi della distribuzione di una v.c. continua

Le definizioni di valore atteso e varianza delle v.c. continue, ricalcano quelle delle v. discrete:

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

$$VAR(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 \cdot f(x)dx$$

Nella pratica, conoscendo il particolare modello di probabilità seguito da una variabile è di più semplice calcolo sia il valore atteso sia la varianza

Anche nel caso delle variabili casuali è possibile calcolare lo scarto quadratico medio o come più comunemente è chiamata la deviazione standard

$$SD(X) = \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

29 – I modelli probabilistici

Non è possibile classificare tutti i possibili esperimenti casuali ma esistono diversi elementi in comune tra quelli utilizzati solitamente nella pratica

Esistono degli schemi standard per gli esperimenti e quindi per le v. casuali ad essi associati: tali schemi sono detti *modelli probabilistici* e sono descritti mediante *famiglie parametriche* di variabili casuali

Una FAMIGLIA PARAMETRICA di v. casuali è un insieme di variabili $X \sim f(x;\theta)$ descritte da un parametro θ (con f funzione di probabilità), appartenente ad un insieme Θ, detto spazio parametrico

Le v. casuali di una famiglia parametrica si distinguono esclusivamente per lo specifico valore numerico del parametro θ che le distingue:

→ **non si hanno informazioni sufficienti per determinare esattamente la distribuzione di probabilità, ma la struttura del fenomeno consente di fare delle ipotesi che restringono l'insieme delle possibili distribuzioni**

30 – La variabile casuale UNIFORME DISCRETA

Descrive le situazioni in cui non ci sono ragioni di ritenere un esito più probabile dell'altro

Diremo che una variabile casuale X segue una distribuzione uniforme su {1, 2, … , n} se ha una funzione di probabilità

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{per } 1, 2 \ldots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \longrightarrow \boxed{X \sim U(n)}$$

n è il numero di eventi inclusi nel dominio

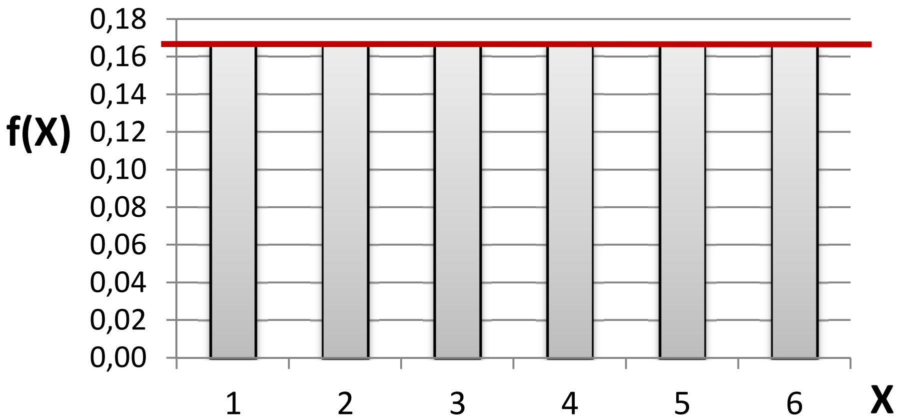
Si incontra quasi sempre in situazioni "artificiali" come i giochi:

ESEMPIO

lancio di un dado ben equilibrato

$$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(X = x) = 1/6 = 0{,}167$$



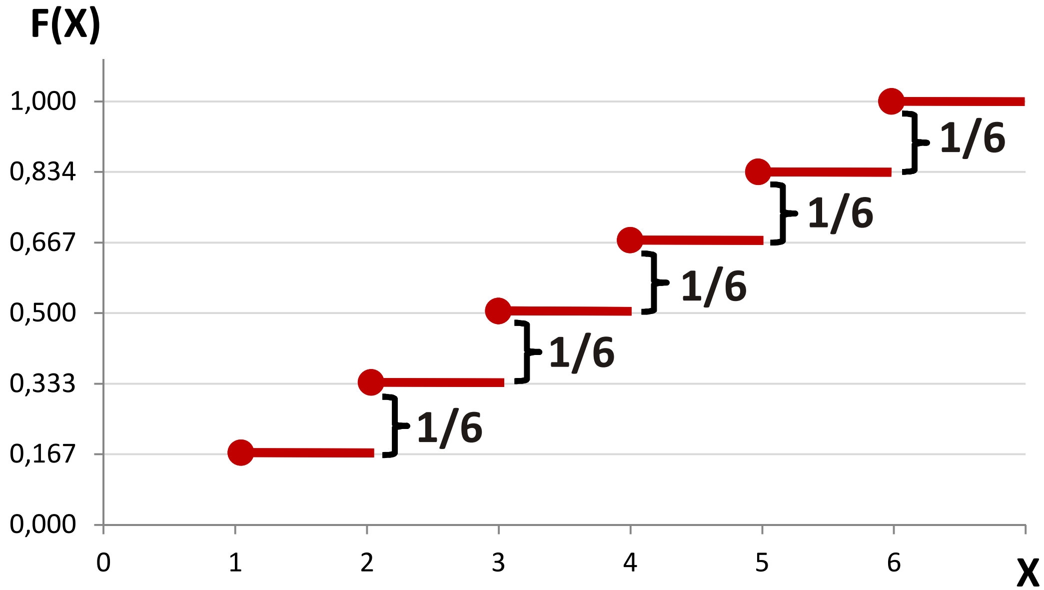
31 – Funzione di ripartizione e sintesi

La f. di ripartizione associata ad una distribuzione uniforme è del tipo:

$$F(X) = \sum_i \frac{i}{n} \quad \text{per } i = 1, 2, 3, ..., n$$

ESEMPIO: lancio di un dado ben equilibrato

X	P(X)	F(X)
1	1/6	1/6
2	1/6	2/6
3	1/6	3/6
4	1/6	4/6
5	1/6	5/6
6	1/6	6/6



v. atteso ⟶ $$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(x_i) = \sum_i x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i x_i$$

varianza ⟶ $$VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_i x_i^2 - \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_i x_i\right]^2$$

32 – Esempio

Un meccanico effettua 5 diverse categorie di interventi ed ogni settimana ripete lo stesso numero di interventi per ogni categoria

Gli incassi sono i seguenti:

Servizio	Incasso	P(X)	F(X)
1	120	0,20	0,20
2	60	0,20	0,40
3	20	0,20	0,60
4	80	0,20	0,80
5	70	0,20	1,00

a) Qual è l'incasso atteso per una settimana qualsiasi?

$$E(X) = \frac{1}{n} \cdot \sum_i x_i = \frac{1}{5} \cdot (120 + 60 + 20 + 80 + 70) = 70 \longrightarrow$$ incasso atteso

b) Qual è la varianza dell'incasso atteso?

$$VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{5} \cdot (120^2 + 60^2 + 20^2 + 80^2 + 70^2) - 70^2 = 1040$$

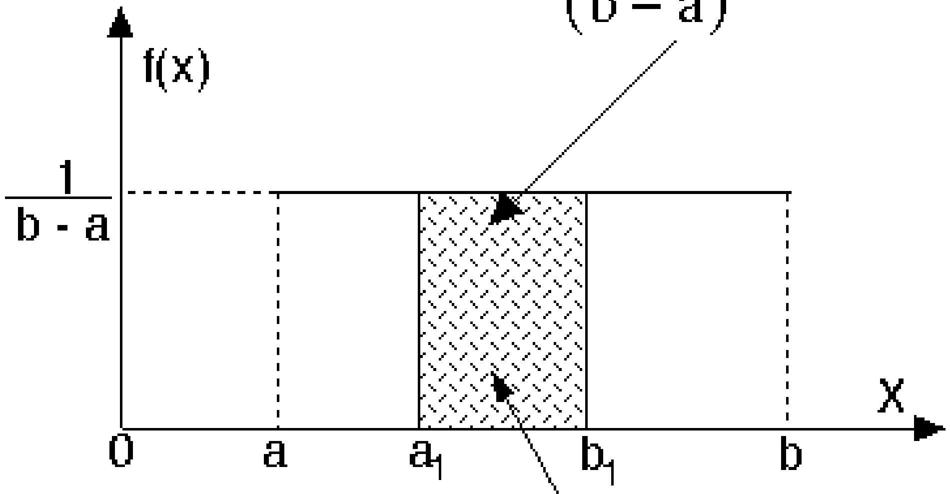
33 – La variabile casuale UNIFORME CONTINUA

Le caratteristica principale è che le sue realizzazioni sono equiprobabili

Si applica nelle situazioni in cui il fenomeno:

- **Assume valori in un intervallo limitato [a,b]**
- **La probabilità di ogni sottointervallo di [a, b] è proporzionale all'ampiezza del sottointervallo**

$$P(a_1 \leq X \leq b_1) = \frac{(b_1 - a_1)}{(b - a)}$$



$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{b-a} dx$$

La funzione di densità è:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{per } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

In ciascuno dei punti appartenenti all'intervallo la probabilità è costante

$$X \sim U(a, b)$$

$$F(k)=P(a \le X \le k)=\int_a^k \frac{1}{b\text{-}a}\,dx = \frac{k-a}{b-a}$$

ESEMPIO

Gli autobus passano nei pressi dell'università ogni ora fra le 8.30 e le 13.30: calcolare la prob. che una persona, capitando a caso durante tale periodo, debba aspettare almeno un quarto d'ora

La v.c. X "tempo mancante al prossimo bus“ segue un modello uniforme dato che "*capitare a caso*" significa che può capitare in uno qualsiasi dei 60 minuti:

$$P(x \ge 15) = 1 - P(X < 15) = 1 - F(15)$$
$$= 1 - \frac{15-0}{60-0} = 1 - 0.25 = 0.75$$

$$E(X)=\int_a^b \frac{t}{b-a}\,dt=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)=\frac{b+a}{2}$$

Nella v.c. UNIFORME il v. atteso coincide con il v. centrale del suo supporto

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b+a)^2}{12}$$

ESEMPIO

Il tempo medio di attesa alle pensiline è pari a:

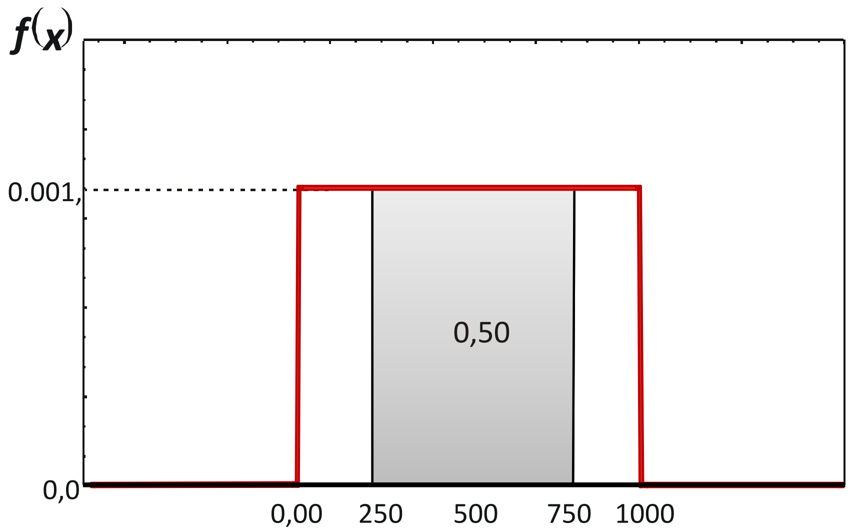
$$E(X)=\int_0^{60} \frac{t}{60}\,dt=\frac{0+60}{2}=30\text{min}$$

36 – Esercizio

Consideriamo una stazione di servizio con una cisterna per la benzina da 1000 litri, riempita ogni mattina prima dell'apertura. L'analisi delle vendite passate indica che non è possibile prevedere la quantità totale di benzina venduta in un dato giorno, ma il limite inferiore sarà 0 e il limite superiore 1000 litri: la capacità della cisterna. Inoltre l'analisi storica indica che tutte le richieste nell'intervallo da 0 a 1000 litri, sono egualmente probabili

X = litri di benzina venduti in un dato giorno

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}001 & \text{se } 0 \le x \le 1000 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Es. la probabilità che le vendite siano tra 250 e 750 litri, con f(x)=0.001 ordinata della funzione di densità costante, è pari a 0.50, cioè l'area sottesa sull'intervallo tra 250 e 750