1 – Incertezza e casualità

L'*incertezza* è una componente imprescindibile di ciascun aspetto della vita quotidiana: il problema nasce dal fatto che spesso si opera in una condizione di parziale conoscenza circa il verificarsi o meno di un dato stato della realtà

esempio

1. La diagnosi di una malattia non deriva univocamente dal complesso dei sintomi evidenziati in un paziente
2. La scelta di investire o meno in un certo titolo azionario non scaturisce necessariamente dal suo andamento nelle contrattazioni precedenti

Ogni qual volta si attiva un processo di osservazione e/o misurazione di un fenomeno soggetto a variazione si può parlare di esperimento

Se l'esito è prevedibile a priori con certezza l'esperimento è allora detto **deterministico**

Se l'esito non può essere previsto con certezza allora l'esperimento è **casuale**

Le politiche aziendali sono spesso basate su una assunzione implicita o presunta di incertezza

ESEMPIO

Il presidente di una società ha presentato offerte in 5 diverse gare di appalto per l'anno successivo. Attualmente i dipendenti possono essere impegnati per un massimo di due progetti, e la società può assumere manodopera a tempo determinato al massimo per un terzo progetto. Se la società si aggiudicasse 4 o 5 progetti sarebbe necessario sub-appaltarne una parte o aumentare il n° di dipendenti. Il presidente deve quindi valutare l'eventualità di aggiudicarsi da 0 a 5 progetti:
ritenere che la probabilità di aggiudicarsi due progetti sia del 70% comporterà decisioni diverse dal valutare che invece sia del 70% la probabilità di aggiudicarsene quattro

ESEMPIO

In una indagine di mercato volta ad analizzare i piani di consumo che regolano le scelte di acquisto di certi beni, il direttore marketing di una grande società vuole studiare le intenzioni di acquisto da parte dei consumatori di una nuova TV di grandi dimensioni nei prossimi 12 mesi. Il responsabile marketing sottopone un questionario a un campione di consumatori allo scopo di valutare: a) la probabilità che un consumatore pianifichi l'acquisto di una grande TV nell'arco di 12 mesi; b) la probabilità che un consumatore acquisti effettivamente la TV

Ciascuno degli esiti possibili di un esperimento casuale è detto evento casuale

Esempio: lancio di una moneta (➲ esperimento casuale)
esiti possibili: TESTA, CROCE (➲ eventi casuali)

Acquisto o meno di un articolo da parte di un consumatore

Cambiamento giornaliero di un indice azionario (es. MIB30)

Peso di una confezione di biscotti, scelta da una linea produttiva…

Un evento è un fatto fisico o concettuale, descritto da una proposizione, che si verifica o meno sotto determinate condizioni

Due eventi con caratteristiche particolari sono:

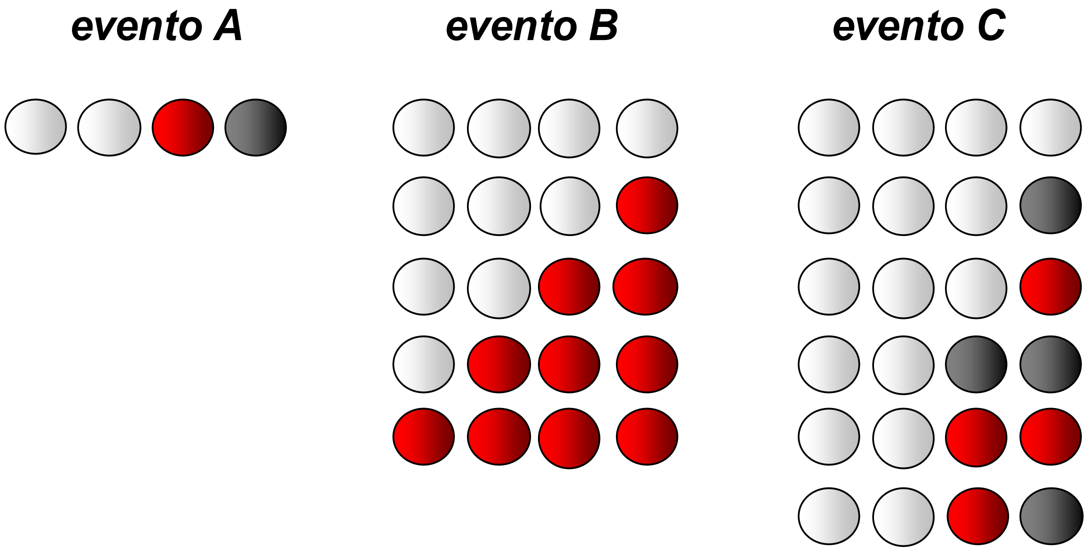
- l'evento certo Ω (si verifica sempre)
- l'evento impossibile $\emptyset$ (non si verifica mai)

4 – “Costruiamo” un esperimento

Poniamo in un’urna 100 palline:

20 nere, 30 rosse, 50 bianche

Estraiamo 4 palline in sequenza. Possiamo prendere in considerazione i seguenti eventi:
A: estrazione di una pallina nera, una rossa e 2 bianche
B: nessuna presenza delle palline nere
C: estrazione di 2 o più palline bianche



5 – Eventi e teoria degli insiemi

Possiamo descrivere un esperimento e le sue realizzazioni anche con la teoria degli insiemi, per cui dato un insieme S (associato a Ω) ogni evento A_i costituisce un sottoinsieme di S

E' possibile far corrispondere i concetti della logica degli eventi a quelli della teoria degli insiemi secondo lo schema seguente

Insiemi	*Simbologia*
ambiente	Ω
vuoto	$\emptyset$
inclusione	$A \subseteq B$
complementare	$\bar{A}$
unione	$A \cup B$
intersezione	$A \cap B$
disgiunti	$A \cap B = \emptyset$

La teoria degli insiemi ci consente di rappresentare tutti gli eventi (e le relative operazioni sugli eventi) anche graficamente, attraverso i cosiddetti *Diagrammi di Venn*

L'insieme di tutte le realizzazioni possibili di un certo esperimento è detto **spazio degli eventi elementari** o **spazio campionario**

$$\boxed{S = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_k\}}$$

Lo spazio campionario è a sua volta un evento, da cui $S = \Omega$ e conseguentemente $\overline{S} = \emptyset$

Si possono individuare tre situazioni di interesse:

1) S contiene un numero finito $n \in \mathbb{N}$ di eventi elementari

2) S contiene un'infinità numerabile di eventi elementari

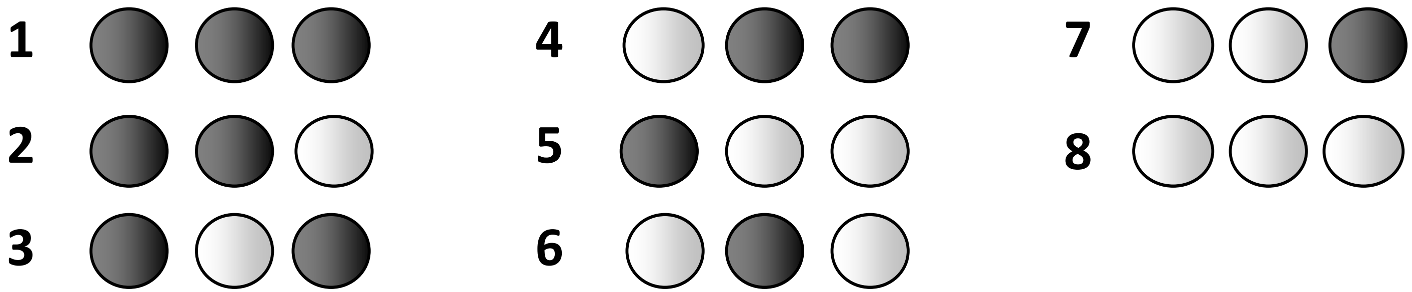
3) S ha cardinalità del continuo. Tipicamente, in questo caso, S è IR o un intervallo della retta reale della forma [a; b]

Lo spazio è detto <u>discreto</u> se è costituito da un numero finito o da un'infinità numerabile di punti, è invece detto <u>continuo</u> se costituito da un'infinità più che numerabile di punti

7 – Esempio: Spazio degli eventi

(1) Consideriamo una urna contenente 100 palline (30 Nere, 70 Bianche)

Estraiamo 3 palline in sequenza: i possibili eventi elementari sono (tenendo conto dell'ordine di estrazione)



(2) Consideriamo il lancio di due dadi con 6 facce

I possibili eventi elementari sono (tenendo conto dell'ordine di lancio)

**S = {(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6),
(3;1),(3;2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6),(4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6),
(5;1),(5;2),(5;3),(5;4),(5;5),(5;6),(6;1),(6;2),(6;3),(6;4),(6;5),(6;6)}**

8 – Eventi elementari ed eventi composti (1) Unità n° 08

L'evento composto deriva da una asserzione logica sugli eventi elementari di un esperimento: se $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ sono eventi elementari allora si definiscono composti

$$\boxed{F_1=\{E_1, E_2\}} \quad \boxed{F_2=\{E_1, E_3, E_4\}}$$

Per indicare l'appartenenza di un evento elementare ad un particolare evento composto si utilizza la simbologia:

$$E_i \in F_j \quad se \;\; E_i \;\; è \;\; un \;\; esito \;\; incluso \;\; in \;\; F_j$$
$$E_i \notin F_j \quad se \;\; E_i \;\; non \;\; è \;\; un \;\; esito \;\; incluso \;\; in \;\; F_j$$

L'evento composto descritto da un singolo evento elementare è detto singoletto: il termine "evento" dovrebbe essere attribuito solo a quello composto, anche in forma di singoletto, evitando la locuzione "evento elementare" anche se ormai radicata nell'uso

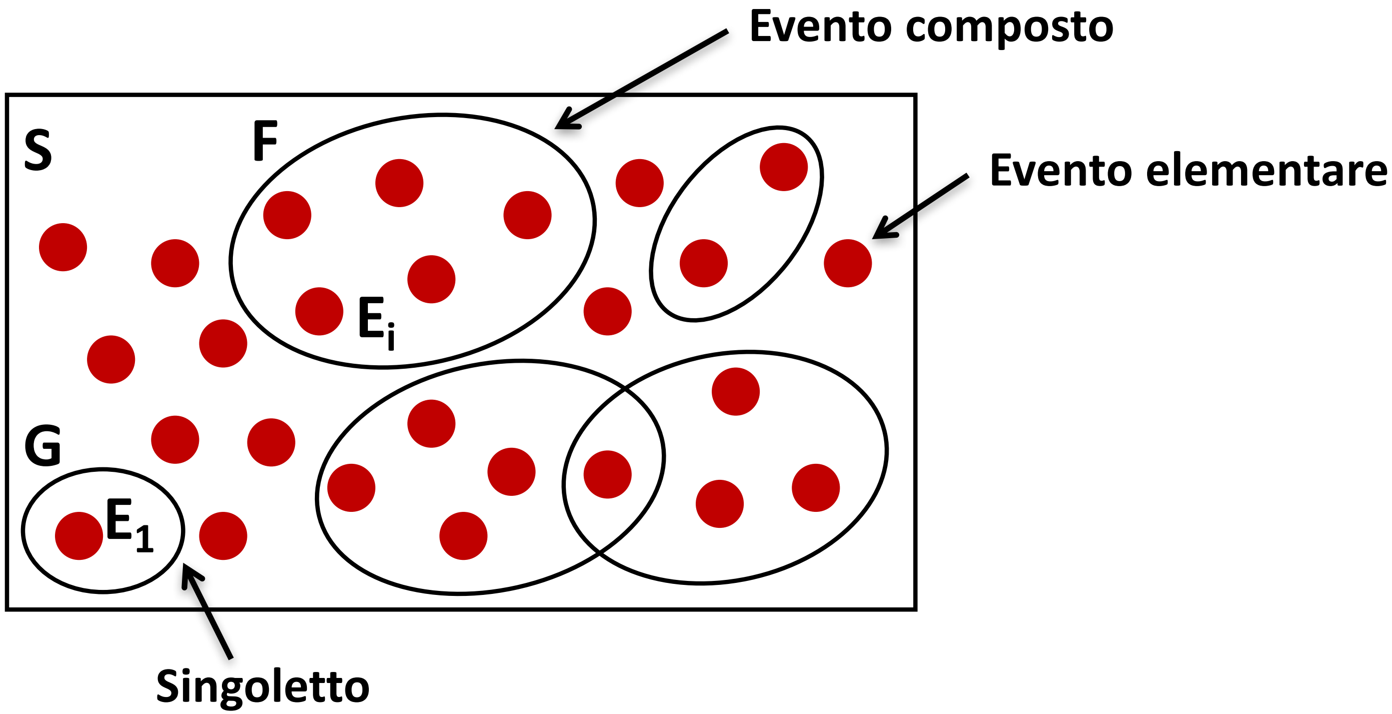
La nozione di singoletto consente di applicare le operazioni della teoria degli insiemi a tutti gli eventi e non solo a quelli composti

9 – Eventi elementari ed eventi composti (2) — Unità n° 08

L'evento elementare è un elemento non ulteriormente scomponibile dello spazio associato ad un certo esperimento

➡ $E_i \in F$

➡ $E_1 \in G$

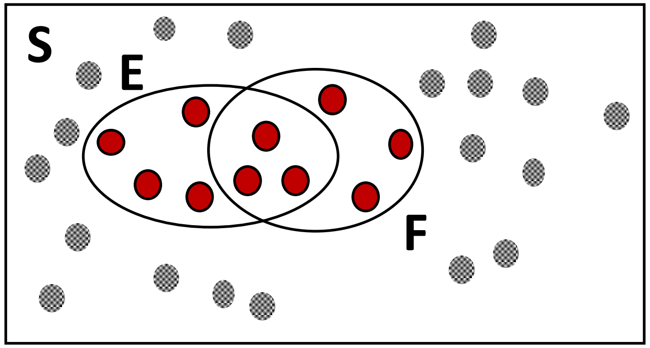


L'evento composto è un insieme di eventi elementari che si verifica allorché si verifichi uno dei suoi eventi elementari

Si distingue tra l'evento composto G formato da un solo evento elementare (singoletto) e lo stesso evento elementare E_1

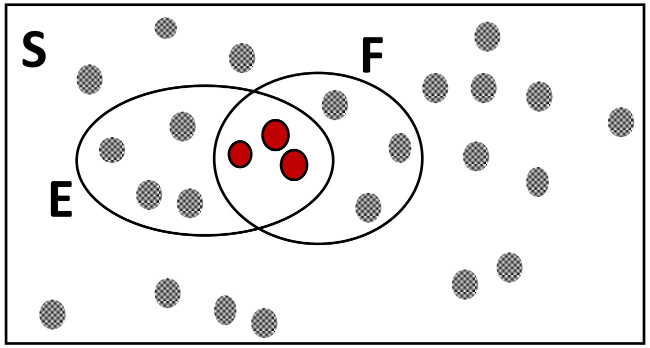
EVENTO UNIONE

Sia S lo spazio campionario associato a un esperimento, dati due eventi (esiti) casuali E e F, l'evento unione E∪F si verifica (è vero) se si verifica almeno uno degli eventi



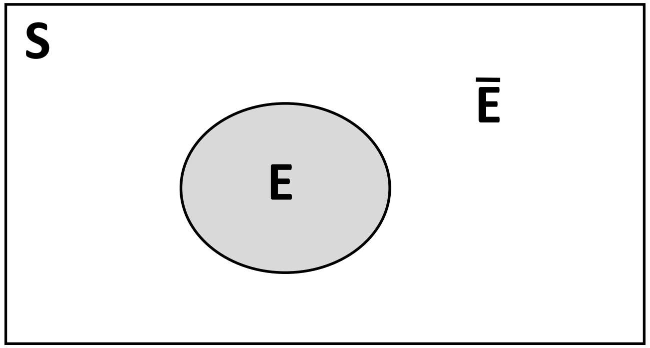
EVENTO INTERSEZIONE

Sia S lo spazio campionario associato a un esperimento, dati due eventi casuali E e F, l'evento intersezione E∩F si verifica (è vero) se si verificano entrambi gli eventi



EVENTO NEGAZIONE

L'evento negazione o (complementare) $\bar{E}$ di un evento E, si verifica quando non si verifica E



NB. Unione e intersezione si riferiscono a singoli eventi, la negazione si riferisce invece all'intero esperimento

11 – Esempio: unione, intersezione e negazione

Consideriamo due eventi E e F costituiti dai primi 6 numeri estratti da una urna contenente 90 palline numerate da 1 a 90

$$E = \{87, 12, 23, 8, 45, 90\} \qquad F = \{8, 84, 41, 12, 36, 17\}$$

L'evento unione $E \cup F$ è ottenuto considerando tutti gli eventi elementari contenuti in E e F

$$E \cup F = \{87, 12, 23, 8, 45, 90, 84, 41, 36, 17\}$$

L'evento intersezione $E \cap F$ è ottenuto considerando i soli eventi elementari comuni tra E e F

$$E \cap F = \{12, 8\}$$

L'evento negazione E è ottenuto considerando tutti gli eventi elementari non contenuti in $\bar{E}$

$$\bar{E} = \{1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,24,25,26,27\\ 28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41,42,43,44,46,47,48,\\ 49,50,51,52,53,54,55,56,57,58,59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,\\ 69,70, 71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81,82,83,84,85,86,88,89\}$$

12 – Proprietà delle operazioni

Dalla Teoria degli Insiemi è possibile derivare proprietà interessanti utili per la costruzione di tutte le tipologie di eventi composti

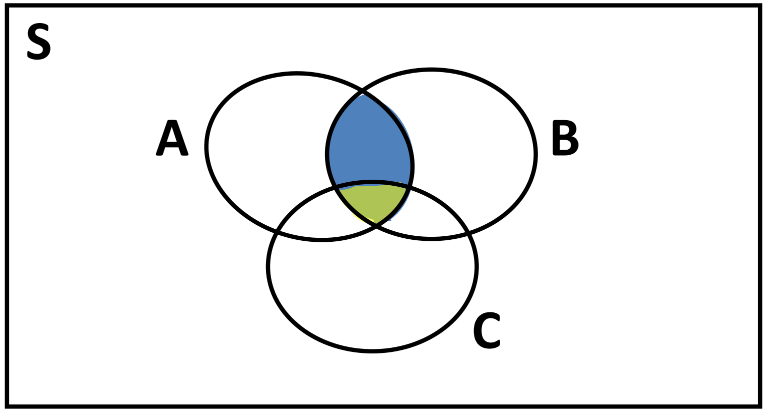
Proprietà	UNIONE	INTERSEZIONE
Legge commutativa:	$E \cup F = F \cup E$	$E \cap F = F \cap E$
Legge associativa:	$E \cup (F \cup G) = (E \cup F) \cup G$	$E \cap (F \cap G) = (E \cap F) \cap G$
Legge distributiva:	$E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$	$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$
Idempotenza:	$E \cup E = E$	$E \cap E = E$
Monotonia $(E \supset F)$:	$E \cup F = E$	$E \cap F = F$

Fra i due eventi estremi valgono le relazioni: $\bar{\Omega} = \varnothing$ $\qquad$ $\bar{\varnothing} = \Omega$

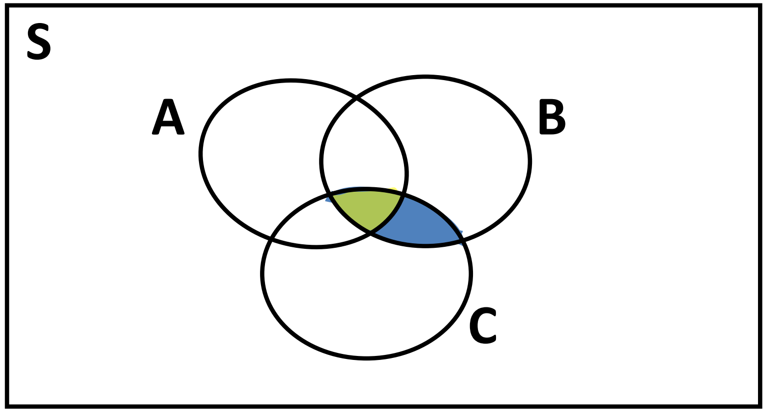
13 – Legge associativa, intersezione e diagrammi di Venn

Consideriamo tre eventi A, B e C e rappresentiamo con un diagramma di Venn la loro intersezione: per la legge associativa possiamo scrivere il nuovo evento (evidenziato in giallo nel diagramma) in due modi differenti

$(A \cap B) \cap C$



$A \cap (B \cap C)$



Come si vede, per la legge associativa, si ottiene lo stesso risultato se si considera l'intersezione dell'evento intersezione $A \cap B$ con l'evento C oppure se si considera l'intersezione dell'evento A con l'evento intersezione $B \cap C$

14 – Esempio

In un esperimento casuale abbiamo a disposizione due urne: nella prima sono contenute 7 biglie bianche e 3 nere, nella seconda 5 biglie bianche e 5 nere. Scegliendo un'urna a caso, come possiamo scrivere l'evento "estrarre una biglia bianca e una nera"?

C_1 = scelgo urna 1 C_2 = scelgo urna 2
B = scelgo una biglia bianca N = scelgo una biglia nera

$(C_1 \cup C_2) \cap [(B \cap N)]$

scelgo un'urna a caso

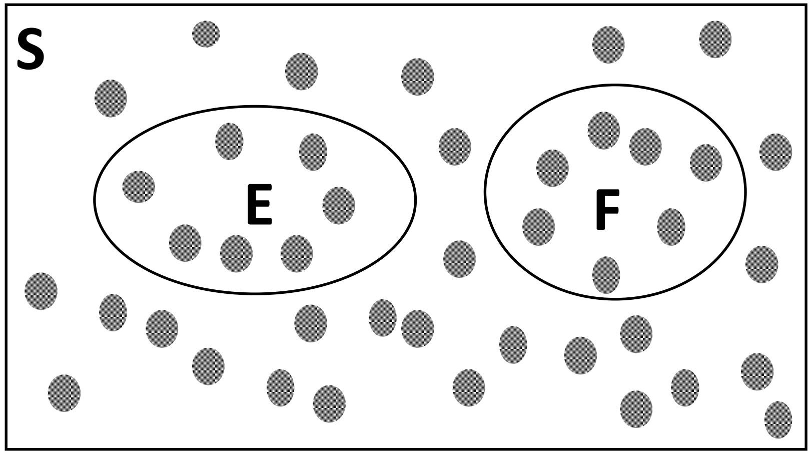
estraggo una biglia bianca e una nera

$$(C_1 \cup C_2) \cap [(B \cap N)] = [C_1 \cap (B \cap N)] \cup [C_2 \cap (B \cap N)]$$

15 – Eventi compatibili e incompatibili

L'evento unione e l'evento intersezione così come sono stati definiti sono detti compatibili, perché hanno almeno un elemento in comune, e quindi possono verificarsi insieme

Due eventi E e F sono definiti incompatibili se non possono presentarsi insieme: per tale ragione sono anche detti eventi disgiunti



Sfruttando le operazioni tra eventi possiamo definire due eventi incompatibili come due eventi la cui intersezione è vuota, uguale cioè all'evento impossibile:

$$E \cap F = \varnothing$$

Allo stesso modo possiamo definire l'evento certo come unione di eventi incompatibili:

$$E \cup \bar{E} = F \cup \bar{F} = \Omega$$

In talune circostanze è possibile determinare gli eventi di un esperimento a partire dai cosiddetti dati osservati

Supponiamo di chiedere ad un campione di 1000 individui se sono o meno intenzionati ad acquistare una Tv entro i successivi 12 mesi. Dopo 12 mesi viene verificato l'effettivo acquisto:

Acquisto Pianificato	Acquisto Effettuato SI	Acquisto Effettuato NO	Totale
SI	200	50	250
NO	100	650	750
Totale	300	700	1000

Lo spazio campionario consiste nell'intero insieme dei 1000 individui

<u>La definizione degli eventi dipende da come vengono classificati i diversi risultati</u>

Rispetto ai piani di acquisto:
- A: *acquisto pianificato*
- *B: acquisto non pianificato*

Rispetto all'acquisto effettuato:
- C: *acquisto effettuato*
- D: *acquisto non effettuato*

Il **complementare** o **negazione** di un evento **A** è l'**evento negato Ā** che comprende tutti gli eventi elementari che non fanno parte di A

Il complementare di "A = acquisto pianificato" è "B = acquisto non pianificato = Ā"

Un **evento congiunto** o **evento intersezione** è un evento definito da due o più caratteristiche

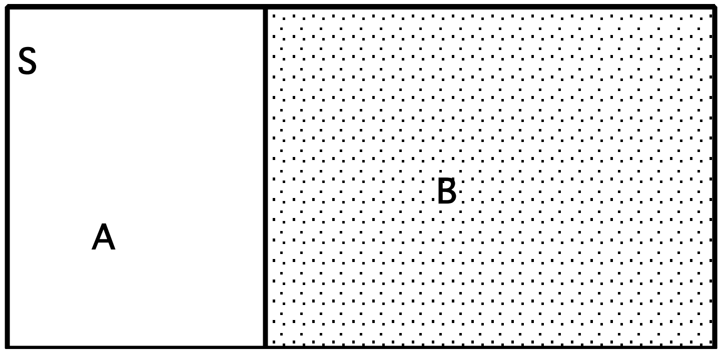
L'evento "A = acquisto pianificato e C = acquisto effettivo" è un evento congiunto

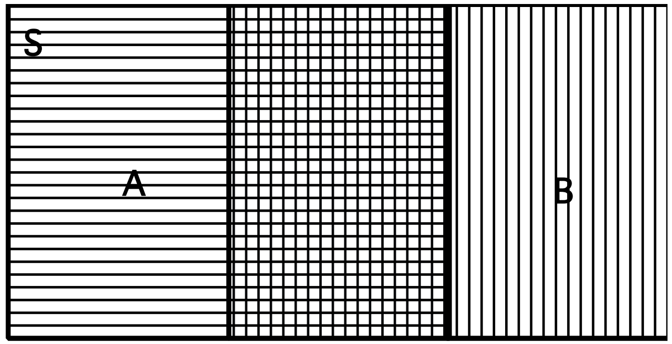
L'**evento unione** è l'evento che si realizza quando è vero l'evento A oppure l'evento B oppure sono veri entrambi

L'evento "A = acquisto pianificato o C = acquisto effettivo" è un evento unione

19 – Eventi necessari e partizione dello spazio campionario

Se in un esperimento due eventi sono tali per cui almeno uno dei due si verifica, allora sono detti necessari: vuol dire che dall'unione dei due eventi si ottiene l'evento certo





Es.: *eventi necessari e incompatibili*

Una classe di 24 studenti consiste di 14 matricole e 10 studenti del 2° anno

A: Si sceglie una matricola
B: Si sceglie uno studente del 2° anno

Es.: *eventi necessari ma compatibili*

Il censimento delle persone distingue tra presenti e residenti

A: La persona è presente
B: La persona è residente

Si dice che gli eventi $E_1, \dots, E_k$ appartenenti a S formano una partizione di S se:

1) **sono incompatibili presi due alla volta**
2) **la loro unione è uguale all'evento certo**

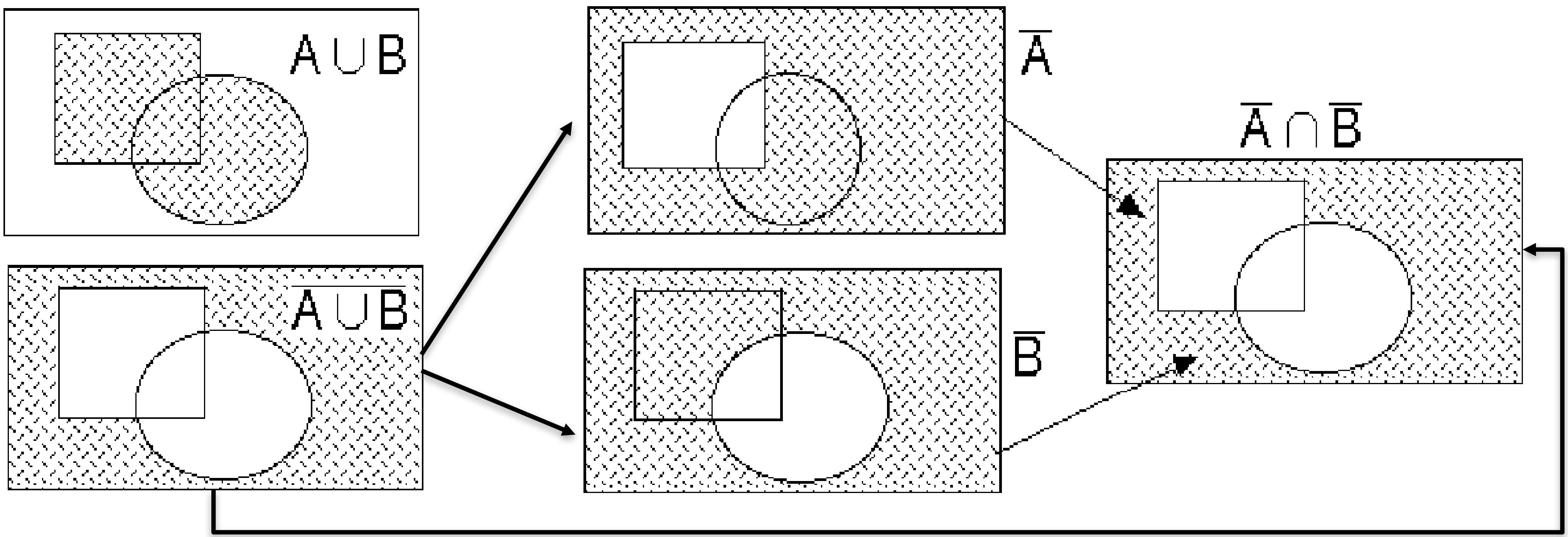
20 – Le leggi di De Morgan

Augustus De Morgan

E' possibile utilizzare solo due operazioni sugli eventi: la terza può essere ricavata dalle altre in base alle cosiddette leggi di De Morgan

Complemento ed intersezione definiscono l'unione $\boxed{\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}}$

Complemento ed unione definiscono l'intersezione $\boxed{\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}}$



21 – Esercizio

Considerato a caso uno tra i candidati all'esame di ammissione ad una accademia teatrale

Sia A l'evento *"il candidato ha meno di 35 anni"*, B l'evento *"ha una buona dizione"* e C l'evento *"ha già avuto esperienze di lavoro nel mondo dello spettacolo"*

Adoperando la nozione insiemistica si scrivano gli eventi:

1. **Il candidato non ha una buona dizione**
2. **Ha meno di 35 anni e una buona dizione**
3. **Ha meno di 35 anni ma non ha una buona dizione**
4. **Non ha una buona dizione ma ha avuto esperienze di lavoro**
5. **Ha più di 35 anni, una buona dizione ed esperienze di lavoro**
6. **Possiede una delle tre caratteristiche**
7. **Ha buona dizione o ha già lavorato ma non ha entrambe le caratteristiche**

1. Il candidato non ha una buona dizione
2. Ha meno di 35 anni e una buona dizione
3. Ha meno di 35 anni ma non ha una buona dizione
4. Non ha una buona dizione ma ha avuto esperienze di lavoro
5. Ha più di 35 anni, una buona dizione ed esperienze di lavoro
6. Possiede una delle tre caratteristiche
7. Ha buona dizione o ha già lavorato ma non ha entrambe le caratteristiche

1) $\overline{B}$

2) $A \cap B$

3) $A \cap \overline{B}$

4) $\overline{B} \cap C$

5) $\overline{A} \cap B \cap C$

6) $A \cup B \cup C$

7) $(B \cup C) - (B \cap C)$

ESERCIZIO 1

Siano A, B e C tre eventi che si identificano nei sottoinsiemi A = {1,2,3,8}, B = {2,3,5,7,8} e C = {3,6,7,9,10} di un generico spazio S={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}. Determinare:

$$E_1 = A \cap (B \cap C) \quad E_2 = A \cup B \cup C \quad E_3 = \overline{B} \cap \overline{C} \quad E_4 = \overline{A \cup B} \quad E_5 = \overline{A \cap B} \quad E_6 = C \cap \overline{C}$$

ESERCIZIO 2

Un esperimento casuale consiste nel lancio contemporaneo di due dadi da gioco; posto che le facce di ciascun dado siano state contraddistinte con gli interi dall'1 al 6, costruire lo spazio dei campioni e i sottoinsiemi che rappresentano i seguenti eventi:

1. **I numeri portati dalle facce superiori dei due dadi sono uguali**
2. **La somma dei due numeri portati dalle facce superiori dei due dadi è 5**
3. **Il numero riportato dalla faccia superiore di un dado è doppio di quello riportato dalla faccia superiore dell'altro**

Il concetto di *probabilità* fu introdotto per la prima volta nel XVII secolo con la pubblicazione dell'*Ars Conjectandi* da parte di James Bernoulli, nel tentativo di valutare quantitativamente e quindi gestire l'incertezza a partire dallo studio di problemi sui giochi d'azzardo

IN GENERALE CON LA PROBABILITA' SI CERCA DI DARE UNA MISURA DELL'INCERTEZZA CONNESSA ALL'ESITO DI UN ESPERIMENTO CASUALE

Le idee sulla probabilità non sono fortemente discordanti, il problema riguarda piuttosto il significato della <u>nozione</u> di probabilità:

(1) per elevare a rango di scientifico il concetto di probabilità si deve depurarla di tutti gli elementi soggettivi che la riguardano e la caratterizzano

(2) non solo tali elementi non rappresentano causa di disturbo, ma ne fanno il punto di partenza per la definizione e la conseguente teoria matematica

25 – Concezione classica della probabilità

Il primo tentativo di una formalizzazione matematicamente rigorosa della teoria della probabilità è dovuto a Laplace

Pierre Simon Laplace

Assumiamo che un evento A sia costituito dall'unione di un certo numero di eventi elementari:

la probabilità associata ad A è definita come la proporzione del numero di risultati favorevoli all'evento A ed il numero (finito) di tutti i possibili risultati dell'esperimento

PROBABILITA' DELL'EVENTO A →

$$\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}}$$

(si basa sull'assunto implicito che ciascun evento è ugualmente possibile)

Il sig. Rossi acquista 5 biglietti della lotteria. Sapendo che sono stati venduti complessivamente 10000 biglietti, che probabilità ha di vincere?

$$P(V)=\frac{5}{10000}=0{,}0005$$

26 – Concezione frequentista della probabilità

La concezione frequentista di von Mises è quella seguita dalla maggior parte dei testi scientifici, specie nelle scienze sperimentali

Richard von Mises

Sia $A_1, A_2, \dots, A_n$ una successione di n prove ripetute e indipendenti (ad es. lanci di una moneta) in cui un certo risultato A (ad es. testa) può verificarsi o meno:

A_1 risulta vero se A si è verificato nella 1ª prova (cioè se esce testa nel primo lancio), A_2 risulta vero se l'evento A si è verificato nella 2ª prova, e così via

Sia f_n la frazione di successi sulle n prove:

$$f_n = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P(A) = \lim_{n \to \infty} f_n}$$

LEGGE EMPIRICA DEL CASO

In altre parole, P(A) è la frequenza relativa del numero di successi al crescere delle n prove

27 – Concezione soggettivista della probabilità

Secondo l'approccio soggettivo, dovuto a de Finetti, la probabilità è una misura del *grado di fiducia* che un soggetto coerente ripone nel verificarsi di un certo evento A

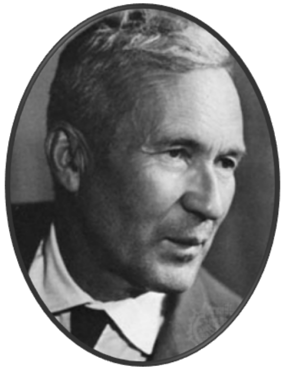

Bruno de Finetti

In tale contesto, il termine "soggettivo" non va inteso come "mancante di oggettività" ma al contrario come risultante dal soppesare ogni elemento di giudizio di cui il soggetto dispone

Si chiama ***probabilità di un evento A*** la misura del "grado di fiducia" in A espressa da un numero reale p = P(A) tale che una scommessa di quota p su A sia coerente

Probabilità soggettiva: la probabilità di un evento A, secondo l'opinione di un individuo coerente, è il prezzo p che egli stima equo attribuire ad un importo unitario esigibile solo al verificarsi di A

28 – La teoria assiomatica di Kolmogorov



Andrey N. Kolmogorov

Nel 1933 Kolmogorov sviluppò una TEORIA DELLA PROBABILITA' sfruttando le analogie tra insiemi ed eventi

L'idea guida del matematico russo è che sia possibile sviluppare una teoria della probabilità senza definire la probabilità: si stabiliscono solo le regole a cui deve sottostare la sua assegnazione e le entità a cui deve essere assegnata

(1) Introduzione dei CONCETTI PRIMITIVI: *(PROVA, EVENTO, PROBABILITA')*

(2) In base a questi si stabiliscono i POSTULATI cioè le regole per ragionare sulle probabilità

(3) Da questi e solo da questi segue il CALCOLO DELLE PROBABILITA'

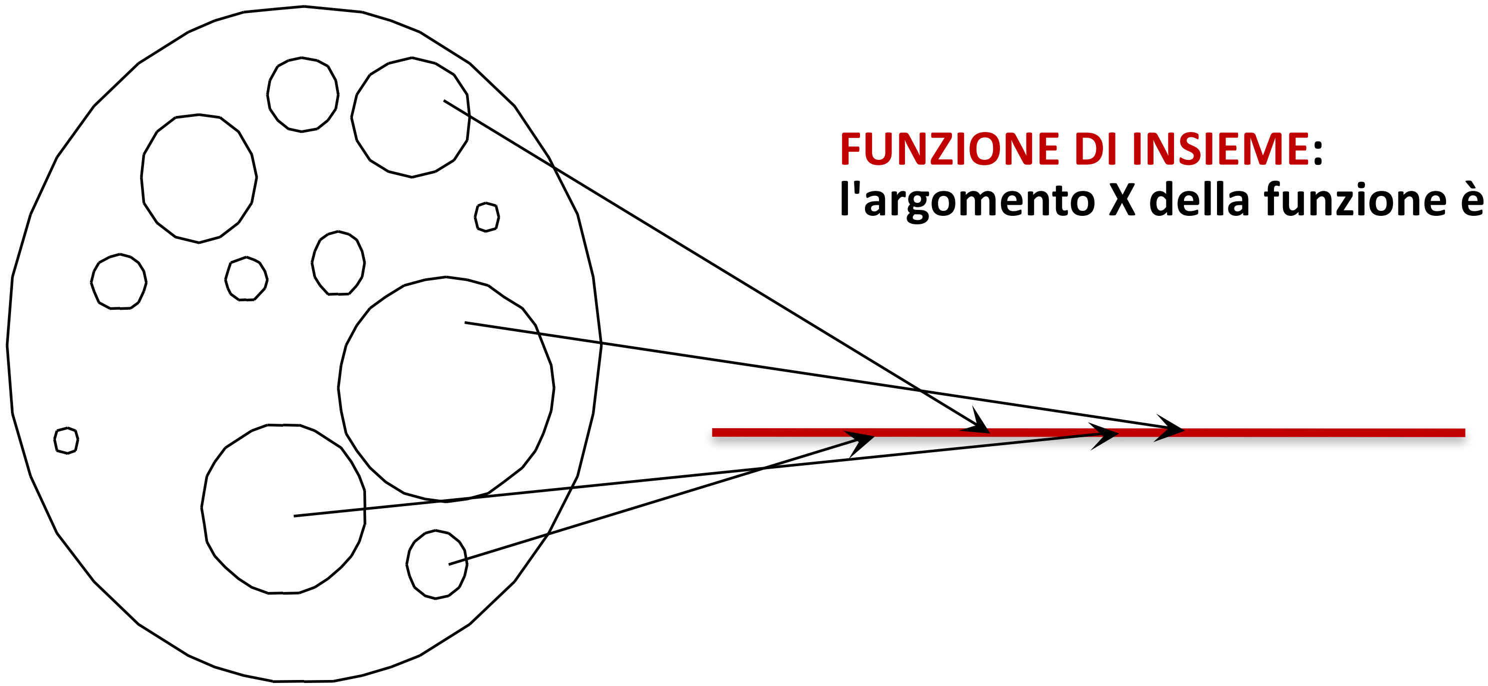
Per "quantificare" la probabilità associate ai diversi eventi si ricorre comunque ai principi derivanti dalle concezioni presentate precedentemente

29 – La funzione d'insieme

Una funzione f(x) è una legge che associa ad ogni punto di un insieme (DOMINIO) uno ed un sol punto di un altro insieme (CODOMINIO o IMMAGINE)

La nozione si estende al caso in cui il dominio è costituito da INSIEMI

$$y = f(x)$$



FUNZIONE DI INSIEME:
l'argomento X della funzione è un insieme

I concetti basilari del calcolo delle probabilità sono detti primitivi perché innati, quindi non esiste una definizione formale

- Per *prova* si intende ogni esperimento soggetto ad incertezza
- Ogni esito possibile della prova costituisce un *evento casuale*
- Per *probabilità* si intende un numero associato al verificarsi di un evento

Possiamo riassumere i postulati della teoria assiomatica nella seguente formulazione:

1 – $P(A) \geq 0$ per ogni A

2 – $P(\Omega) = 1$

3 – se $\{A_n\}$ è una famiglia di eventi a due a due disgiunti allora $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

1) Probabilità dell'evento contrario

Dato un evento A e il suo complemento $\bar{A}$ si ha che

$$P\left[\bar{A}\right] = 1 - P[A]$$

2) Probabilità dell'evento differenza

Dati due eventi compatibili A e B, la probabilità dell'evento differenza A-B è data da

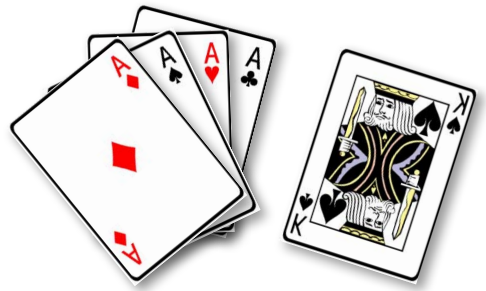
$$P[A - B] = P[A] - P[A \cap B]$$

3) Probabilità dell'evento unione (probabilità totali)

Dati due eventi compatibili A e B, la probabilità che si verifichi almeno uno degli eventi è

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

Qual è la probabilità di scegliere un asso o un re di picche?



$$P[\mathrm{C}] = P[\mathrm{A} \cup \mathrm{B}] = P[\mathrm{A}] + P[\mathrm{B}] =$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{1}{52} = \frac{5}{52} \approx 9,6\%$$

Qual è la probabilità di scegliere un asso o una carta di picche?

$$P[\mathrm{C}] = P[\mathrm{A} \cup \mathrm{B}] = P[\mathrm{A}] + P[\mathrm{B}] - P[\mathrm{A} \cap \mathrm{B}] =$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} \approx 30,7\%$$

33 – Eventi equiprobabili

Per una particolare classe di eventi è possibile assegnare un valore alla probabilità sulla base dei soli postulati. Supponiamo che una certa prova generi un numero finito di eventi $E_1, \ldots, E_n$ e siano essi una partizione dello spazio campionario

$$E_i \cap E_j = \varnothing \quad \forall\ i \neq j = 1, \ldots, n \qquad \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$$

Supponiamo che gli eventi siano equiprobabili, cioè che ogni E_i abbia una probabilità $P(E_i) = k$ per ogni $i=1,\ldots,n$

La classe di eventi necessari, incompatibili e equiprobabili è una *partizione equiprobabile* di Ω

$$P(\Omega) = P\Bigg(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{n} E_i}_{\text{necessari}}\Bigg) \underbrace{=}_{\text{incompatibili}} \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \underbrace{=}_{\text{equiprobabili}} nP(E_i) \longrightarrow P(E_i) = \frac{1}{n}$$

Se in una prova gli eventi elementari costituiscono una partizione equiprobabile è possibile assegnare in modo univoco la misura della probabilità a qualsiasi evento derivandola dai postulati

Maria dedica il sabato pomeriggio a una delle seguenti attività:

- Cura delle piante (0.24) → A
- Studio (0.15) → B
- Passeggiare con le amiche (0.33) → C
- Ascoltare musica (0.12) → D
- Preparare dolci (0.16) → E

Qual è la probabilità che Maria il prossimo sabato:

1) Ascolti musica o curi le piante
2) Non studi
3) Esca con le amiche o prepari un dolce o curi le piante
4) Stia a casa

35 – Soluzione

1) Ascolti musica o curi le piante
2) Non studi
3) Esca con le amiche o prepari un dolce o curi le piante
4) Stia a casa

$$P[\mathrm{D} \cup \mathrm{A}] = P[\mathrm{D}] + P[\mathrm{A}] = 0,24 + 0,12 = 0,36$$

$$P\left[\overline{\mathrm{B}}\right] = 1 - P[\mathrm{B}] = 1 - 0,15 = 0,85$$

$$P[\mathrm{C} \cup \mathrm{E} \cup \mathrm{A}] = P[\mathrm{C}] + P[\mathrm{E}] + P[\mathrm{A}] = 0,33 + 0,16 + 0,24 = 0,73$$

$$P[\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{D} \cup \mathrm{E}] = P\left[\overline{\mathrm{C}}\right] = 1 - P[\mathrm{C}] = 1 - 0,33 = 0,67$$

36 – Esercizio

Da un sondaggio effettuato tra i lettori di una rivista risulta che Il 55% dei lettori è appassionato di musica (A), il 35% di sport (B), il 25% di cinema (C). Risulta inoltre che il 20% ha interessi diversi da quelli elencati, mentre il 5% ama tutti e tre. Sapendo che il 15% ama lo sport e il cinema e che il 10% ama la musica e il cinema, qual è la probabilità che scelto un lettore a caso sia:

1) **Appassionato di musica e sport**
2) **Appassionato di musica e sport ma non di cinema**

$$P[\mathrm{A}]=0,55 \qquad P[\mathrm{B}]=0,35 \qquad P[\mathrm{C}]=0,25$$

$$P\left[\bar{\mathrm{A}}\cap\bar{\mathrm{B}}\cap\bar{\mathrm{C}}\right]=0,20 \qquad P[\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}]=0,05$$

$$P[\mathrm{B}\cap\mathrm{C}]=0,15 \qquad P[\mathrm{A}\cap\mathrm{C}]=0,10$$

37 – Esercizi

(1) In una partita di 6000 cioccolatini tutti confezionati nello stesso modo risulta che 2000 sono al liquore, 1000 al caffè e 3000 al latte. Prendendo a caso un cioccolatino qual è la probabilità che sia al latte o al caffè?

$$P[\mathrm{L} \cup \mathrm{C}] = P[\mathrm{L}] + P[\mathrm{C}] =$$

$$= \frac{3000}{6000} + \frac{1000}{6000} = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

(2) In due lotterie si sono venduti rispettivamente 1000 e 2500 biglietti. Se avete acquistato 70 biglietti della prima e 140 della seconda, dove avete maggiore probabilità di vincere?

(3) Qual è la probabilità che in due estrazioni settimanali distinte del lotto, sulla stessa ruota, esca il numero 90?

Vediamo ora in base alla definizione classica di probabilità come calcolare le probabilità di eventi per dati osservati…

Possiamo basarci sulla costruzione di tabelle a doppia entrata o di contingenza

Sia la Probabilità Marginale la probabilità del verificarsi di un evento semplice, ad esempio: *la probabilità che venga pianificato l'acquisto di un nuovo televisore*

Acquisto Pianificato	Acquisto Effettuato		Totale
	SI	NO	
SI	200	50	250
NO	100	650	750
Totale	300	700	1000

La probabilità di estrarre a caso un soggetto che ha pianificato l'acquisto è

$$P(\text{acquisto pianificato}) = \frac{\text{n° soggetti che hanno pianificato l'acquisto}}{\text{n° totale di soggetti}}$$

$$= n_{1.}/n = 250/1000 = 0{,}25$$

➡ **La probabilità che un soggetto abbia pianificato di acquistare una nuova TV è pari a 0,25 (25%)**

Allo stesso modo la probabilità di estrarre a caso un soggetto che ha acquistato la TV è

$$P(\text{acquisto effettuato}) = \frac{\text{n° soggetti che hanno effettuato l'acquisto}}{\text{n° totale di soggetti}}$$

$$= n_{.1}/n = 300/1000 = 0{,}30$$

➡ **La probabilità che un soggetto abbia acquistato una nuova TV è pari a 0,30 (30%)**

40 – Probabilità di intersezione e unione di eventi

P(acquisto pianificato e acquisto effettuato) =

$$= \frac{\text{n° soggetti che hanno pianificato } \textbf{\textit{e}} \text{ acquistato una TV}}{\text{n° totale di soggetti}} = n_{11}/n = 200/1000 = 0{,}20$$

P(acquisto pianificato o acquisto effettuato) =

P(acquisto pianificato) + P(acquisto effettuato)

- P(acquisto pianificato e acquisto effettuato) =

$= n_{1.}/n + n_{.1}/n - n_{11}/n = 250/1000 + 300/1000 - 200/1000 =$

$= 0{,}35$

41 – La logica dell'unione di eventi

Quando sommiamo la probabilità degli eventi "acquisto pianificato" (1ª riga) e "acquisto effettuato" (1ª colonna) contiamo due volte la probabilità dell'evento intersezione "acquisto pianificato e acquisto effettivo" (intersezione tra la 1ª riga e 1ª colonna)

Poiché tale probabilità viene contata due volte occorre sottrarla per ottenere il risultato

Acquisto Pianificato	Acquisto Effettuato SI	Acquisto Effettuato NO	Totale
SI	200	50	250
NO	100	650	750
Totale	300	700	1000

42 – Eventi incompatibili

Supponiamo che ai 300 individui che hanno acquistato la TV sia stato chiesto di specificare la modalità di acquisto:

Grande Magazzino	183
Internet	87
Posta	30
Totale	**300**

Qual è la Probabilità che un individuo selezionato a caso tra i 300, abbia scelto di effettuare l'acquisto via Internet oppure tramite posta?

P(internet *o* posta) = P(internet) + P(posta) - P(internet *e* posta) =
87/300+30/300 – 0/300 = 0,39

La probabilità che un consumatore effettui la transazione via Internet *e* via posta è nulla, ossia i due eventi relativi sono tra loro *incompatibili*: quando uno dei due si realizza l'altro non può verificarsi

43 – Esercizio

Supponiamo che un gruppo di fondi azionari siano stati classificati sulla base della tipologia e della presenza di commissione

	Commissione		
Tipo Fondo	NO	SI	Totale
A capitalizzazione integrale	32	27	59
Misto	75	60	135
Totale	107	87	194

Determinare la probabilità che scelto a caso un fondo azionario:

- questo non preveda pagamento di commissione
- che questo sia un fondo misto e preveda il pagamento di commissione
- che questo abbia una struttura a capitalizzazione integrale o sia libero da commissione
- abbia una qualunque struttura di commissione

P(fondo senza comm.) $= \dfrac{\text{n° fondi che non prevedono commisioni}}{\text{n° totale dei fondi}}$

$= n_{.1}/n = 107/194 = 0{,}55$

P(fondo misto e pagamento commissione) =

$= \dfrac{\text{n° fondi misti } \mathbf{e} \text{ pagamento comm.}}{\text{n° totale dei fondi}} = n_{22}/n = 60/194 = 0{,}31$

P(fondo a cap. integrata o senza commissione) =

P(fondo a cap. integrata) + P(fondo senza commissione)

- P(fondo a cap. integrata e senza commissione) =

$= n_{1.}/n + n_{.1}/n - n_{11}/n = 59/194 + 107/194 - 32/194 = 0{,}69$

P(fondo con qualsiasi struttura di commissione) =

P(fondo senza comm.) + P(fondo con comm.) =

$= (n_{.1}+n_{.2})/n = 107/194 + 187/194 = 1$