01 – La variabile casuale di BERNOULLI — Unità n° 11

Il modello bernoulliano è adatto allo studio di esperimenti con esiti di tipo "dicotomico":

SI/NO | **Buono/Difettoso** | **Successo/Insuccesso**

Jakob Bernoulli

Tutte le prove che producono solo due possibili risultati generano v.c. di Bernoulli: il lancio di una moneta, il sesso di un nascituro, il superamento o meno di un certo livello di inflazione…

È forse la v. casuale più semplice e serve come base per lo studio di altre v. casuali

X	1	0
P(X = x)	π	$(1-\pi)$

La funzione di probabilità è immediata:

$$\boxed{P(X=x)=\pi^{x}(1-\pi)^{1-x}}$$

$$\longrightarrow \boxed{X \sim B(\pi)}$$

La v. casuale X si distribuisce come una Bernoulliana di parametro π

02 – Funzione di ripartizione e sintesi

Ricordando che valore atteso e varianza di una variabile casuale discreta sono:

$$\boxed{E(X)=\sum_i x_i P(x_i)}$$

$$\boxed{V(X)=\sum_i \left[x_i - E(X)\right]^2 P(x_i)}$$

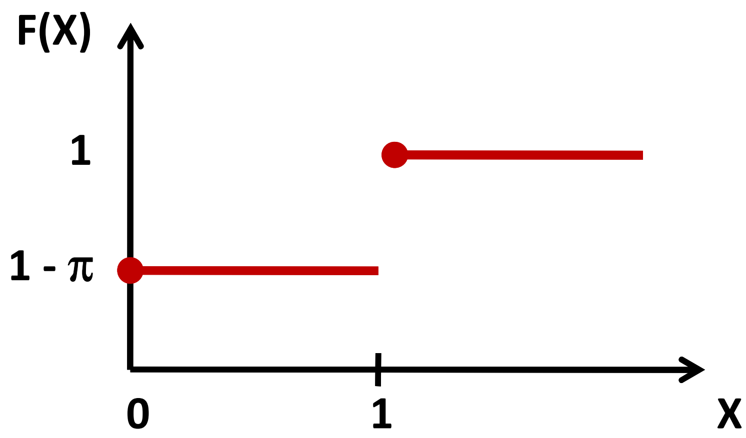
possiamo calcolare valore atteso e varianza di una v.c. di Bernoulli

$$E(X)=1\cdot\pi+0\cdot(1-\pi)=\pi$$

$$VAR(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1^2\cdot\pi+0^2(1-\pi)-\pi^2=\pi-\pi^2=\pi\cdot(1-\pi)$$

La funzione di ripartizione è:

$$F(X)=P(X\leq x)=\begin{cases}0 & \text{se } X<0\\ (1-\pi) & \text{se } 0\leq X<1\\ 1 & \text{se } X\geq 1\end{cases}$$



03 – Esempio

Si supponga che una nuova impresa nel primo anno di attività possa avere due soli risultati:

fallimento o pareggio

Il mercato è tale che ci sono quattro possibilità su dieci di fallire

Il Signor Rossi intende avviare una nuova attività commerciale:

a) Qual è la probabilità che sia ancora attiva al secondo anno?

b) Quali sono media e varianza della distribuzione?

La v.c. X assume solo due valori: pareggio (<u>successo</u>) => X=1 fallimento (<u>insuccesso</u>) => X=0

Dai dati del problema ricaviamo che: $P(X=1) = 0,6$ $P(X=0) = 0,4$

a) La probabilità che l'impresa sia attiva al 2° anno implica il pareggio al 1° anno, quindi è 0,6

b) $\mu = \pi = 0,6$ $\sigma^2 = \pi \cdot (1 - \pi) = 0,6 \cdot 0,4 = 0,24$

04 – La variabile casuale BINOMIALE (1) — Unità n° 11

Supponiamo di considerare un esperimento casuale che ammette solo due possibili risultati successo/insuccesso: se π è la probabilità di successo e (1 – π) la probabilità di insuccesso, la distribuzione di probabilità sarà caratterizzata da una funzione di probabilità del tipo

$$P(X=x)=\pi^{x}(1-\pi)^{1-x}$$

Nella realtà un esperimento (*prova*) viene ripetuto n volte. Se supponiamo che ognuna delle n prove ammette due possibili risultati successo/insuccesso, allora

Il n° di successi in n prove è una v. casuale discreta X che assume valori {0, 1, … , n}

Supponiamo ad esempio di ripetere per 6 volte l'esperimento, di effettuare cioè 6 prove

$$P(S\cap I\cap S\cap I\cap I\cap S)=P(S)\cdot P(I)\cdot P(S)\cdot P(I)\cdot P(I)\cdot P(S)=$$
$$=\pi\cdot(1-\pi)\cdot\pi\cdot(1-\pi)\cdot(1-\pi)\cdot\pi=\pi^{3}(1-\pi)^{3}$$

05 – La variabile casuale BINOMIALE (2) Unità n° 11

Per determinarne la distribuzione di probabilità della X supponiamo che le n prove siano di tipo *Bernoulliano*, indipendenti e con costante probabilità di successo π

$$P(X=x)=\pi^{x}(1-\pi)^{n-x}$$

Probabilità di avere un successo nelle prime x prove (e un insuccesso nelle altre n-x)

Poiché non ci interessa l'ordine di accadimento delle singole prove, è necessario considerare tutte le sequenze che generano lo stesso numero di successi/insuccessi

$$\left.\begin{matrix} SSS & SIS & SSI \\ IIS & ISI & \dots \\ III & \dots & \dots \end{matrix}\right\} \longrightarrow \binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Coefficiente binomiale

n° di abbinamenti possibili tra successi e insuccessi in n prove

$$\boxed{P(X=x)=\binom{n}{x}\cdot\pi^{x}(1-\pi)^{n-x}} \longrightarrow \boxed{X \sim B(\mathbf{n}, \pi)}$$

La v. casuale X si distribuisce come una Binomiale di parametri n e π

06 – Alcune considerazioni sui numeri fattoriali — Unità n° 11

I numeri fattoriali sono utilizzati per calcolare il numero di abbinamenti ottenuti considerando un numero n di oggetti presi un certo numero di volte: due sequenze sono considerate diverse se contengono oggetti diversi

$$\frac{n!}{x!(n-x)!} \longrightarrow$$ *ci dice in quanti modi diversi possiamo "combinare" x successi e (n-x) insuccessi in n prove*

Per convenzione abbiamo che 0! e 1! sono sempre uguali a 1

In quanti modi possiamo abbinare 0 successi e n insuccessi in n prove?

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

In quanti modi possiamo abbinare n successi e 0 insuccessi in n prove?

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

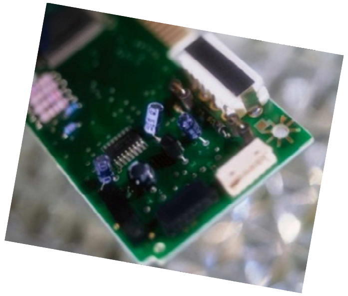
Quando il calcolo diventa complesso possiamo semplificare il rapporto:

ESEMPIO $\longrightarrow$

$$\binom{100}{5} = \frac{100!}{5!(95)!} = \frac{96\times 97\times 98\times 99\times 100}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}$$

07 – Esempio

Il 20% dei componenti elettronici prodotti da una certa azienda è difettoso. Supponendo di estrarre a caso 4 componenti da una linea di produzione, qual è la probabilità che i componenti difettosi siano:



1) Uno 2) Tutti 3) Nessuno

In questo caso abbiamo n = 4 e π = 0,20

$$\boxed{X \sim B(4\,;0{,}20)}$$

(1) $$P(X=1)=\binom{4}{1}0{,}20^1\cdot 0{,}80^3=\frac{4!}{3!1!}\cdot 0{,}20\cdot 0{,}512=\frac{24}{6}\cdot 0{,}1024=0{,}41$$

(2) $$P(X=4)=\binom{4}{4}0{,}20^4\cdot 0{,}80^0=\frac{4!}{4!0!}\cdot 0{,}0016=0{,}0016$$

(3) $$P(X=0)=\binom{4}{0}0{,}20^0\cdot 0{,}80^4=\frac{4!}{0!4!}\cdot 0{,}41=0{,}41$$

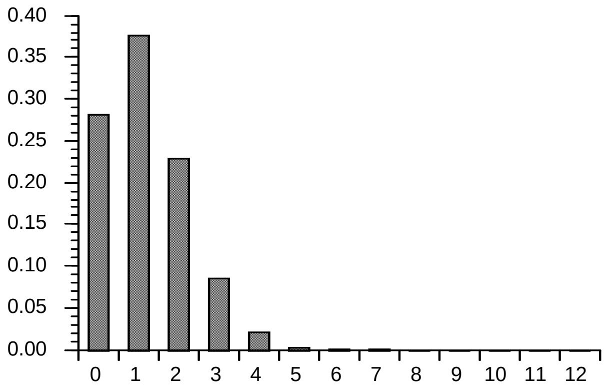
La v.c. Binomiale può essere ottenuta dalla somma di n v.c. di Bernoulli, indipendenti e con probabilità di successo costante: da ciò si ricava che

$$E(X)=E(X_1+X_2+...+X_n)=\pi+\pi+........+\pi=n\pi$$

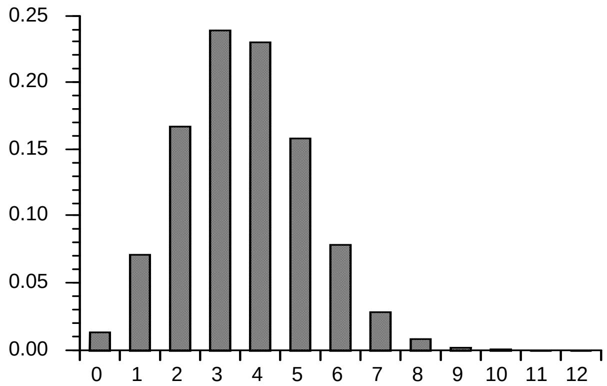
$$V(X)=V(X_1+X_2+...+X_n)=\pi(1-\pi)+...+\pi(1-\pi)=n\pi(1-\pi)$$

1. **Il valore atteso e la varianza crescono al crescere di n**
2. **Per π=0,5 la distribuzione è simmetrica rispetto al valore atteso**
3. **Per n →+∞ la distribuzione tende ad essere simmetrica rispetto al v. atteso**

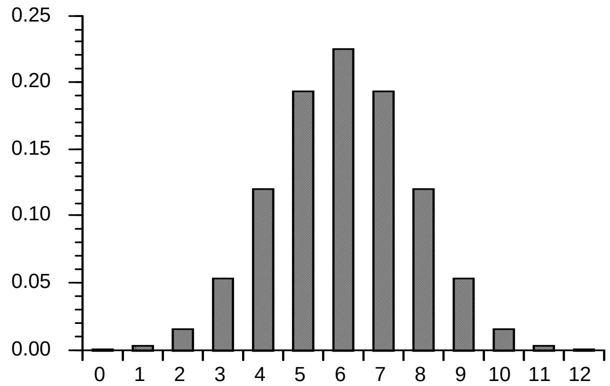
n = 12 π = 0,10



n = 12 π = 0,30



n = 12 π = 0,50



09 – Funzione di ripartizione

La funzione di ripartizione consente di calcolare la probabilità di avere un numero di successi inferiori o uguali ad una soglia data

$$P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} \cdot \pi^{k} (1-\pi)^{n-k}$$

ESEMPIO

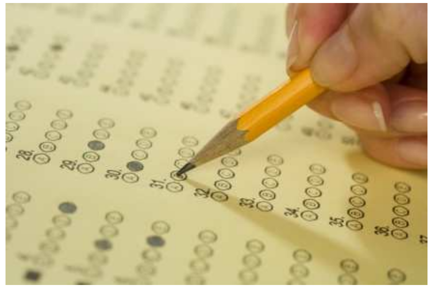
Il monitoraggio di una linea di produzione su un periodo abbastanza lungo ha determinato che un prodotto su dieci è difettoso. Un cliente effettua un acquisto se, scelti a caso e con reimmissione cinque prodotti, trova non più di un prodotto difettoso

a) Qual è la probabilità che il cliente compri?
b) In media, quanti prodotti difettosi ci si deve aspettare scegliendone cinque a caso?

a) $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{5}{0}(0.1)^0(0.9)^5 + \binom{5}{1}(0.1)^1(0.9)^4 = 0.91854$

b) $E(X) = 5 * 0.1 = 0.5$

Un test consiste di n=25 domande a risposta multipla. Ogni domanda offre 4 scelte di cui una sola è corretta. Il test si supera se si risponde esattamente a 13 domande (la metà più uno). Giovanni è totalmente impreparato, tuttavia vorrebbe tentare il test rispondendo a caso a tutte le domande. Qual è la probabilità che Giovanni superi il test?



Le domande sono delle prove bernoulliane con π=0,25

Si deve calcolare la probabilità che si verifichino almeno 13 successi su 25 prove

$$P(\text{Giovanni supera il test}) = P(X \geq 13) = 1 - P(X \leq 12) =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{12} \binom{25}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{25-k} = 1 - 0,9967 = 0,0033$$

11 – La variabile casuale di POISSON — Unità n° 11

Una v. casuale di Poisson è una v. casuale discreta che può assumere qualsiasi valore intero non-negativo

Siméon Poisson

È un modello probabilistico adoperato per rappresentare situazioni di conteggio del n° di occorrenze di un evento in una prefissata unità di tempo

Può essere derivata in due diversi contesti:

1 **DA PROVE BERNOULLIANE**
Quando si considerano moltissime prove ciascuna con probabilità di successo molto piccola (forma limite della binomiale per $n \to \infty$ e $\pi \to 0$)

2 **DA EVENTI TEMPORALI**
Ripetizione di un evento in un intervallo di tempo formato da subintervalli più piccoli

Possibili applicazioni
- Teoria delle code
- N° di interruzioni di energia elettrica in un anno
- N° di errori tipografici in uno scritto
- N° di clienti entrati in un negozio in un dato periodo

12 – Dalla Binomiale alla Poisson

Consideriamo in un modello binomiale la probabilità di successo come rapporto dei casi favorevoli rispetto al numero di prove

$$\boxed{\pi = \frac{\lambda}{n} \text{ con } 0<\lambda<n}$$

$$P(X=x) = \binom{n}{x}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{n^x}}_{\to 1}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}}_{\to 1} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

Per n grande e π piccolo (tali per cui nπ = λ)

Si dimostra che al crescere del numero delle prove, con una probabilità di successo molto piccola, la distribuzione Binomiale può essere approssimata con la distribuzione di Poisson

$$\boxed{P(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}} \quad (con \quad 0<\lambda<\infty) \longrightarrow \boxed{X \sim \mathcal{P}(\lambda)}$$

Il numero di guasti che in un anno si verificano in una centralina telefonica si distribuiscono secondo la legge di Poisson, con λ=3. Qual è la probabilità che in un anno si verifichino tre guasti?

$$P(X=3)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=\frac{3^3}{3!}e^{-3}=\frac{27\cdot 0{,}0497}{6}=0{,}224$$

Il titolare di una pasticceria rinomata per i suoi tortini alle fragole sta tenendo sotto controllo il ciclo di produzione per verificare quante ne vengono inserite su ogni tortino. Supponendo che tale numero segua una distribuzione Poissoniana con λ=6, qual è la probabilità che su un tortino si trovino esattamente cinque fragole?

$$P(X=5)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}=\frac{6^5}{5!}e^{-6}=\frac{7776\cdot 0{,}0024}{120}=0{,}155$$

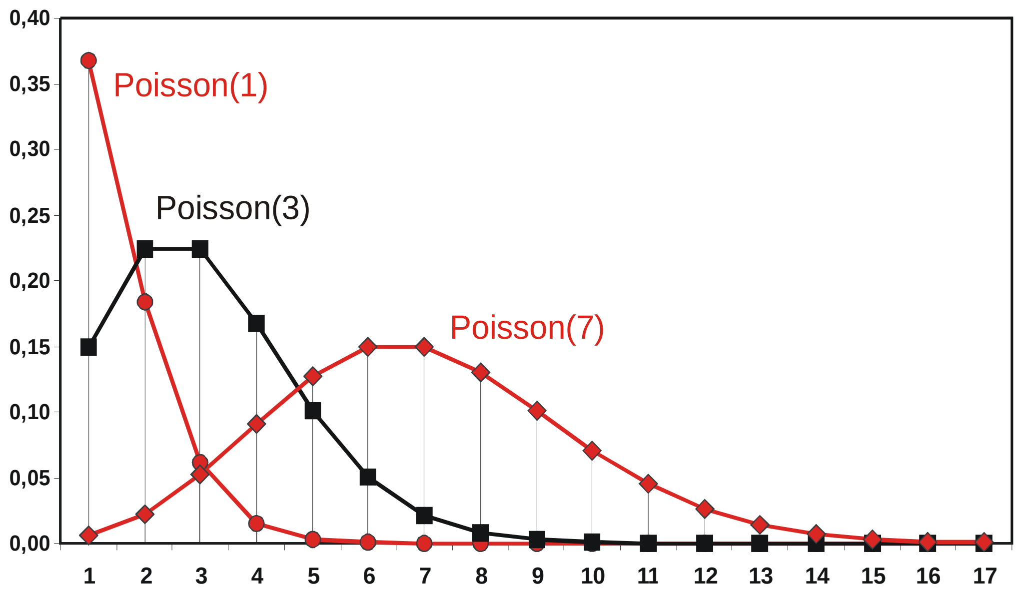
14 – Valore atteso e varianza

È possibile dimostrare che il v. atteso e la varianza di una v.c. di Poisson sono uguali tra loro e pari a λ

$$E(X)=\lambda \quad VAR(X)=\lambda$$

Il parametro caratteristico della legge distributiva Poissoniana è quindi espressione sia del valore medio che della variabilità della distribuzione:

In una centralina telefonica mediamente in un anno si verificano 3 guasti: se il numero di guasti si distribuisce secondo la legge di Poisson, qual è la probabilità di avere in un anno x guasti?



Al crescere di λ la distribuzione della variabile X è sempre più schiacciata e il centro spostato verso destra

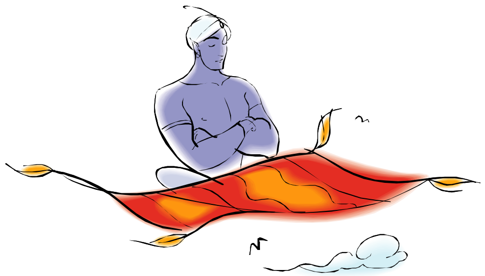
15 – Funzione di ripartizione

La funzione di ripartizione quantifica la probabilità di avere un numero di occorrenze (eventi nell'unità di tempo) inferiore ad una data soglia

$$F(x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

ESEMPIO

Si supponga che il numero di imperfezioni per metro^2 in un tappeto segua la legge di Poisson con λ=2,2:



qual è la probabilità di avere al più 2 imperfezioni per metro quadro?

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \frac{2,2^k e^{-2,2}}{k!} = \frac{2,2^0 e^{-2,2}}{0!} + \frac{2,2^1 e^{-2,2}}{1!} + \frac{2,2^2 e^{-2,2}}{2!} =$$

$$= 0,11 + 0,24 + 0,27 = 0,62$$

16 – Eventi temporali

La v.c. di Poisson esprime la probabilità che in una data unità di tempo si ripetano un certo numero di eventi

Un telefono può squillare (successo) o meno (insuccesso) in ogni istante: supponiamo che suoni, in media, 5 volte in un ora

Se dividiamo l'intervallo in 60 parti uguali otteniamo degli intervalli di 1' per i quali il numero medio di chiamate è pari a 5

Pensiamo agli "intervallini" come prove Bernoulliane in cui la prob. di successo è π=5/60

prob. arrivo 3 chiamate →

$$P(X=3)=\binom{60}{3}\left(\frac{5}{60}\right)^{3}\left(\frac{55}{60}\right)^{57}=0{,}139$$

Se dividiamo ogni intervallo di un minuto in 60 secondi allora avremo 3600 "prove" con una prob. di successo pari a π=5/3600

prob. arrivo 3 chiamate →

$$P(X=3)=\binom{3600}{3}\left(\frac{5}{3600}\right)^{3}\left(\frac{3595}{3600}\right)^{3597}=0{,}140$$

In generale, data una unità di tempo t, una variabile causale poissoniana di parametro λ ha come funzione di probabilità

$$\boxed{P(X=x)=\frac{(\lambda t)^x}{x!}e^{-\lambda t}}$$

→ **è importante notare che anche se n diventa grande e π piccolo si avrà sempre $\pi \cdot n = \lambda$**

dove $\lambda \cdot t$ rappresenta il numero atteso di eventi in t unità di tempo

---

I clienti di un ipermercato arrivano alle entrate secondo un modello di Poisson ad una media di λ = 4 al minuto: qual è la probabilità che entrino 10 clienti nei prossimi 5 minuti?

$$P(X=10)=\frac{\lambda t^{x}\cdot e^{-\lambda t}}{x!}=\frac{4\cdot 5^{10}\cdot e^{-4\cdot 5}}{10!}=0{,}0058\rightarrow 0{,}58\%$$

18 – Esempio

Si supponga che il numero di incidenti in una centrale elettrica segua la Poisson con λ=1 per anno

a) Qual è il numero di incidenti atteso in due anni?

se t=2 allora $\lambda \cdot t = 1 \cdot 2 = 2$

b) Qual è la probabilità che nel prossimo anno non ci siano incidenti?

$$P(X=0)=\frac{\lambda t^0}{0!}e^{-\lambda t}=\frac{1\cdot 1^0}{0!}e^{-1\cdot 1}=0,3679$$

c) Qual è la probabilità che non ci siano incidenti nei prossimi sei mesi?

$$P(X=0)=\frac{\lambda t^0}{0!}e^{-\lambda t}=\frac{1\cdot 0,5^0}{0!}e^{-1\cdot 0,5}=0,6065$$

d) Qual è la probabilità che nel prossimo anno ci sia più di un incidente?

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\frac{1^0}{0!}e^{-1}-\frac{1^1}{1!}e^{-1}=0,2642$$

19 – Dalla Poisson alla Binomiale — Unità n° 11

La Poisson, oltre ad essere importante come v.c. per le innumerevoli applicazioni, é molto utile per approssimare la distribuzione di probabilità della Binomiale

Se X è una v.c. Binomiale con probabilità di successo π ed n è un numero molto grande si ha

$$P(X=x)=\binom{n}{x}(\pi)^x(1-\pi)^{n-x} \cong \frac{(n\pi)^x}{x!}e^{-(n\pi)}$$

L'approssimazione:

è discreta se $n \geq 20$ e $\pi \leq 0,05$

è ottima se $n \geq 100$ e $n \cdot \pi \leq 10$

ESEMPIO ***La probabilità di soffrire degli effetti collaterali di un vaccino anti influenzale è del 5 per mille. Supponendo che il vaccino sia somministrato a 1500 persone, determinare la prob. che non più di una persona subisca effetti collaterali***

$$P(X \leq 1) = \sum_{x=0}^{1}\binom{1500}{x}(0.005)^x(0.995)^{1500-x}$$

$$= 0.00463$$

$$\boxed{\lambda = n * \pi = 1500 * 0.005 = 7.5}$$

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \frac{7.5^0 * e^{-7.5}}{0!} + \frac{7.5^1 * e^{-7.5}}{1!} = 0.00470$$

20 – Esercizio

Un petroliere scopre in media 5 giacimenti ogni 100 trivellazioni effettuate. Dovendo eseguire 40 trivellazioni, qual è la probabilità:
1. ***che scopra un giacimento***
2. ***che scopra da uno a tre giacimenti***

Se assumiamo che la v.c. X = numero di giacimenti scoperti è di tipo Binomiale, con n = 40 e π = 0,05 allora avremo:

$$P(\mathrm{X}=1)=\binom{40}{1}(0,05)^{1}(0,95)^{39}=0,2705$$

Se volessimo utilizzare la Poisson con λ = n·π = 2 (essendo n ≥ 20 e π ≤ 0,05) allora avremmo

$$P(\mathrm{X}=1)=\frac{2^{1}}{1!}e^{-2}=0,2706$$

[Calcolare la probabilità per il punto 2 sia con la legge Binomiale che di Poisson]

21 – La variabile casuale NORMALE

La v. casuale Normale (o *Gaussiana*) è considerata la più importante della Statistica per le innumerevoli applicazioni e per le proprietà di cui gode

L'importanza di tale v.c. risiede negli indubbi vantaggi formali, ma anche nel fatto che moltissimi fenomeni empirici possono essere rappresentati con un modello di tipo gaussiano

Carl F. Gauss

funzione di densità

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}$$

$-\infty<x<+\infty$ **può assumere valori su tutto l'asse reale**

$e=2,71$

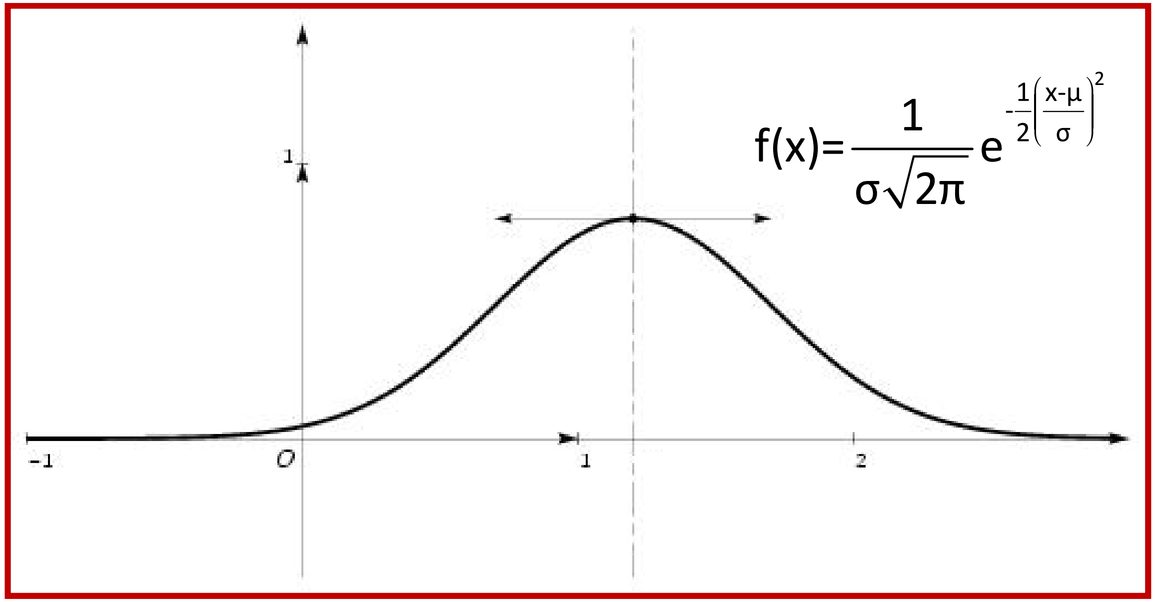
$\pi=3,14$

Si dimostra che la f(X) è una funzione di densità perché

① $f(x)\geq 0$ ② $\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)\,dx=1$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

22 – Forma e parametri della distribuzione



① La funzione di densità della v.c. è simmetrica rispetto al centro

② La densità diminuisce man mano che ci si allontana dal centro

(asintoticamente a destra e a sinistra)

L'area sottesa alla curva, probabilità che la var. casuale X assuma valori nel suo dominio, è pari a 1

Si dimostra che i parametri caratteristici della v.c. Normale sono esattamente il valore atteso e la varianza

$$\boxed{E(X)=\mu}$$

$-\infty<\mu<+\infty$

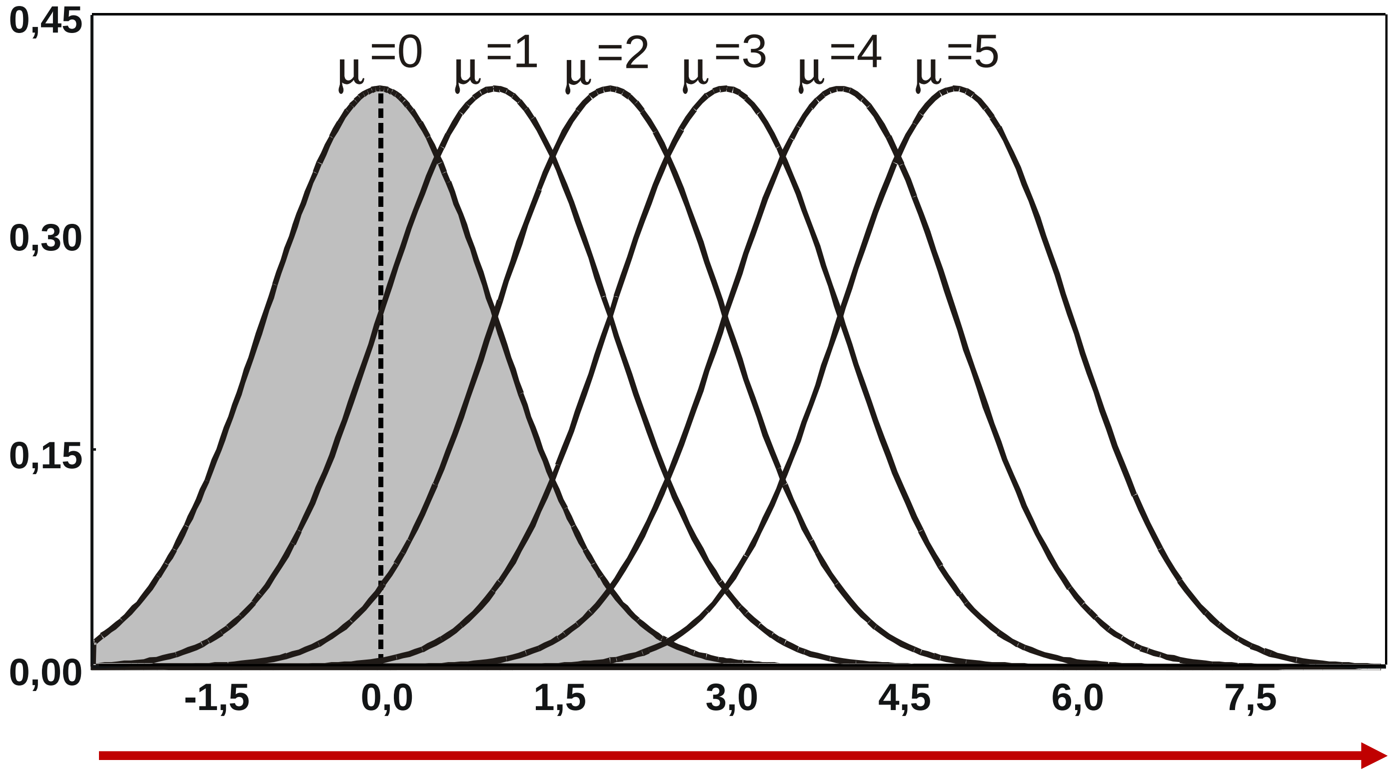
$$\boxed{V(X)=\sigma^2}$$

$\sigma^2>0$

→ In corrispondenza di $x = \mu \pm \sigma$ la funzione di prob. presenta due punti di flesso

23 – Il parametro μ (valore atteso)

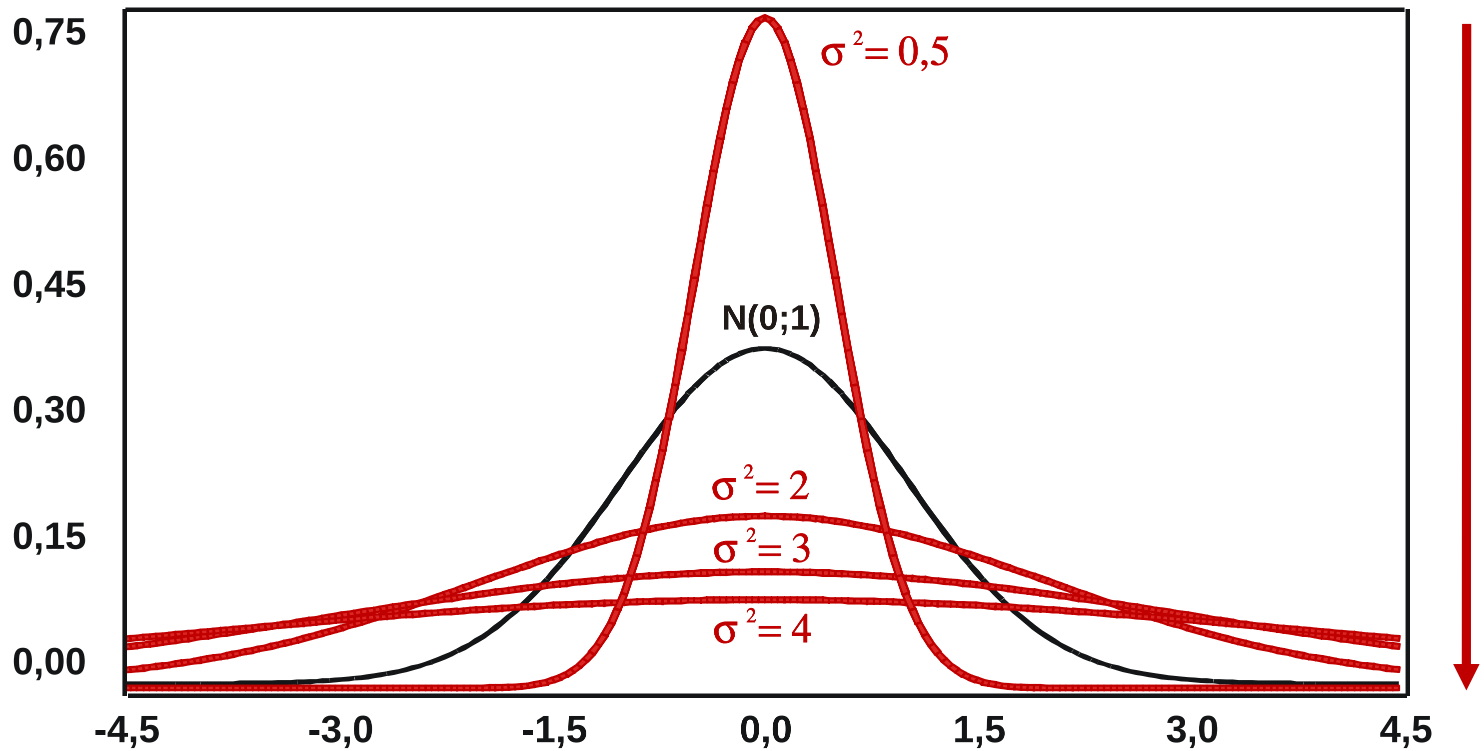
Al variare di μ il grafico resta inalterato nella sua forma ma si modifica la sua localizzazione: al crescere di μ la funzione di probabilità si sposta a destra, al diminuire di μ la funzione di probabilità si sposta a sinistra



La distribuzione normale è simmetrica rispetto al suo centro (*valore atteso*): a tale valore centrale corrisponde anche quello più probabile (*valore modale*)

24 – Il parametro σ^2 (varianza)

Al variare di σ il grafico resta inalterato nella sua localizzazione ma si modifica nella forma: al crescere di σ la funzione di probabilità è più schiacciata rispetto al centro, al diminuire di σ la funzione di probabilità è più appuntita

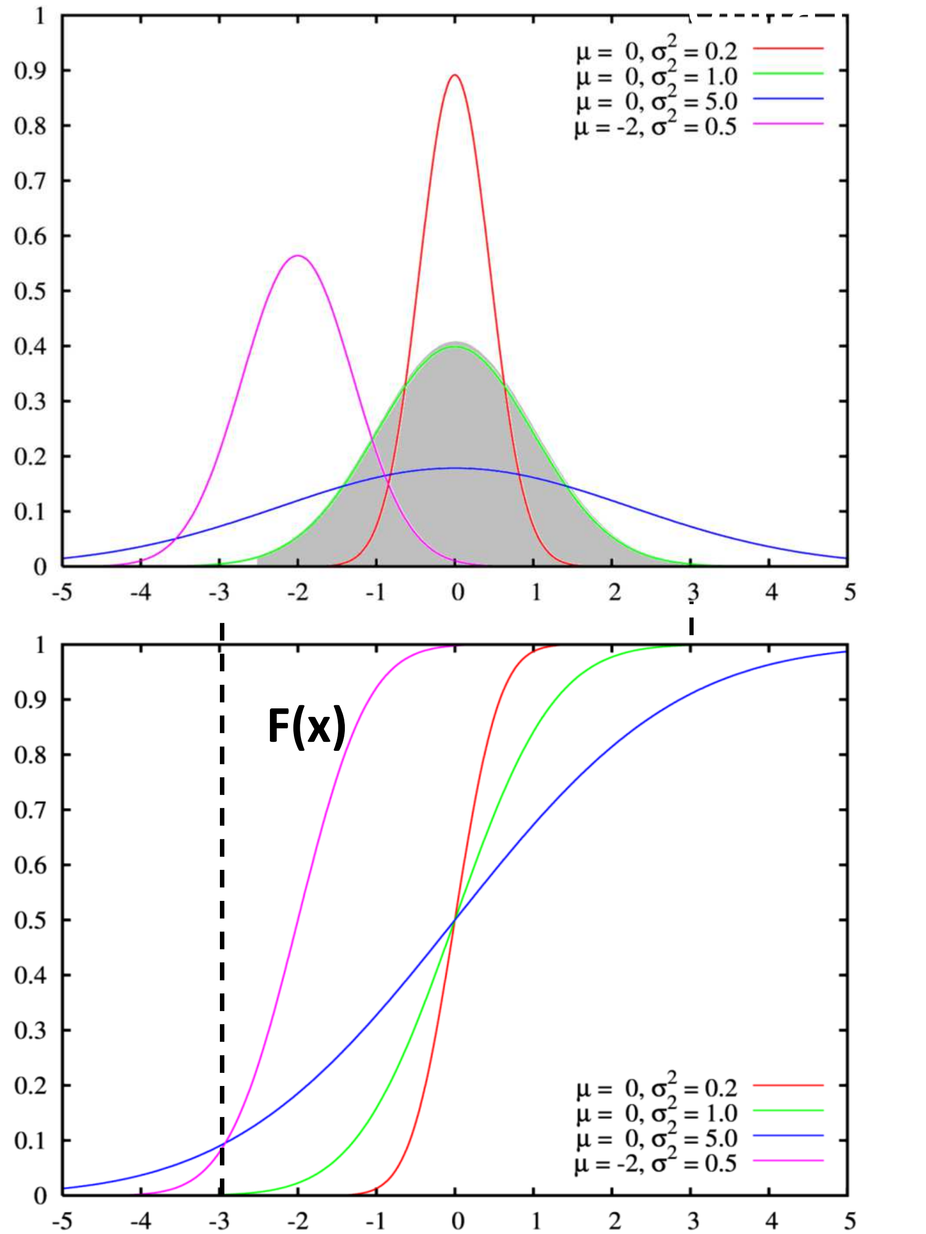


La spiegazione risiede nel fatto che l'area sottesa alla funzione f(x) è sempre pari a 1: se la deviazione standard è bassa i valori di X si addensano intorno al valore atteso e ciò produce un innalzamento dell'ordinata del valore modale

25 – La funzione di ripartizione

La funzione di ripartizione della v.c. Normale è data formalmente da

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}dt$$



Non è facile risolvere questo integrale, tanto che la funzione normale è citata in letteratura come esempio di *funzione non elementare*

Possiamo però descrivere completamente la distribuzione di X attraverso i due parametri μ e σ^2: noti questi valori è possibile calcolare la corrispondente F(x)

Per semplificare il calcolo è possibile far uso di tabelle particolari riconducendo i valori X ad una forma standard

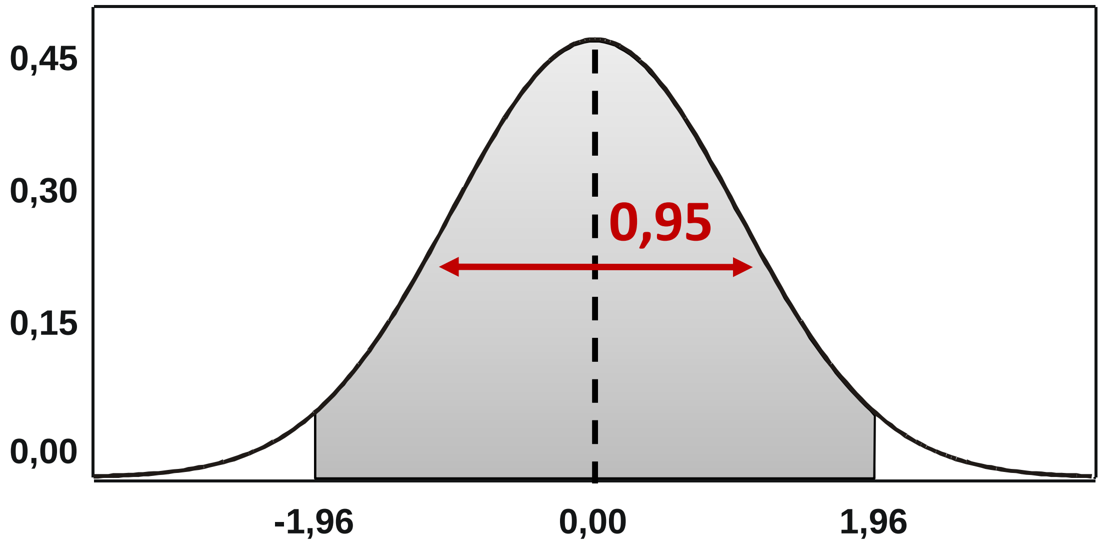
26 – La variabile casuale normale STANDARDIZZATA

Se la v.c. X ha una distribuzione normale con parametri μ e σ², allora la v.c. Z

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

è ancora una v.c. Normale con media nulla e varianza unitaria

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}}$$



$$\boxed{E(Z) = 0} \qquad \boxed{V(Z) = 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z \sim N(0, 1)}$$

27 – Esempio

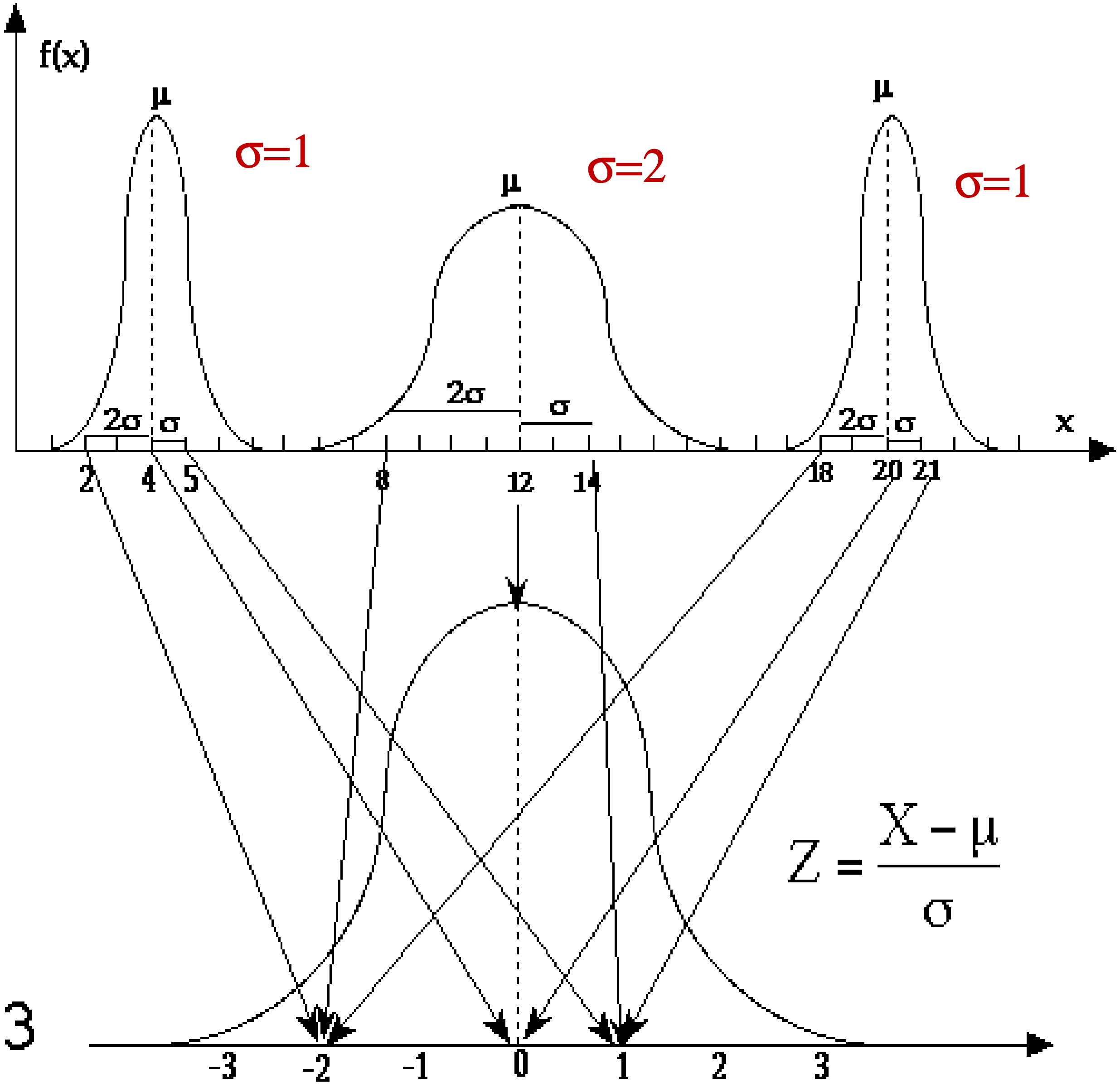
Le tre Normali riportate qui di fianco possono essere di fatto ricondotte a una sola distribuzione, attraverso la trasformazione dei valori x in unità standard

Le aree sottese a X ~ N (μ, σ²) sono identiche a quelle della Z ~ N(0,1)

$$X \sim N(3,4)$$

$$P(X<5) = P\left[\frac{X-3}{2} \le \frac{5-3}{2}\right]$$

$$= P(Z \le 1) = 0.8413$$

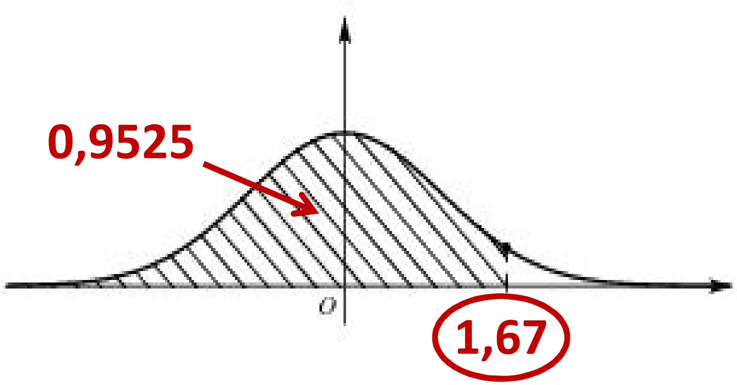


$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

28 – La funzione di ripartizione per Z

Permette di semplificare i calcoli delle aree sottese alla funzione di densità

$$P(X \le x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P(Z \le z) = \Phi(z) \qquad \forall\, z \ge 0$$



Nella tavola troviamo i valori di Φ(z), funzione di ripartizione di una Normale standardizzata:

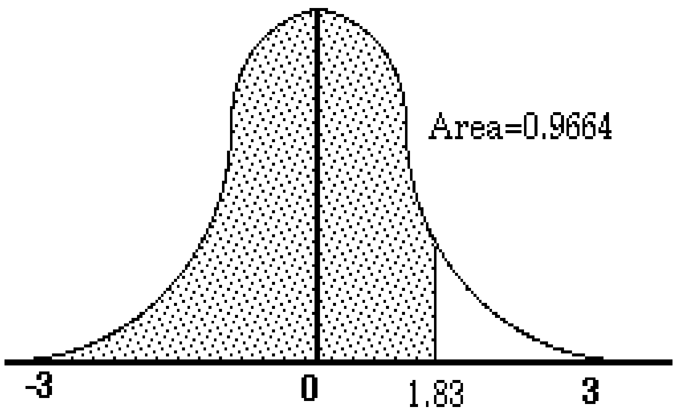
sulle righe della tabella si trova il valore intero e la prima cifra decimale, sulle colonne invece la seconda cifra decimale

Valori della f.r. $\Phi(z) = P(Z \le z)$ della v.c. $Z \sim N(0,1)$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767

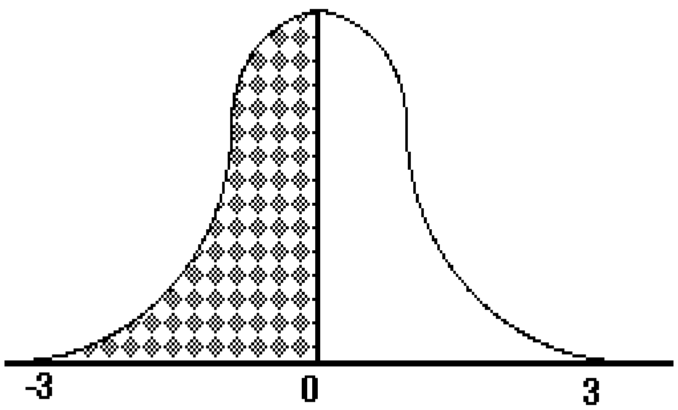
29 – Esempi

Esempio_1: calcolare l'area compresa fra $-\infty$ e 1.83, in simboli: $\phi(1.83)$



$$\phi(1.83) = 0.9664$$

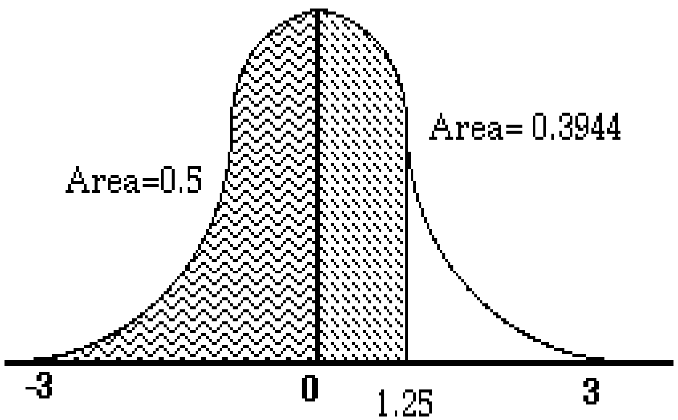
Esempio_2: calcolare l'area compresa fra $-\infty$ e 0, in simboli: $\phi(0)$



$$2\phi(0)=1 \text{ e quindi } \phi(0)=\frac{1}{2}$$

30 – Esempi

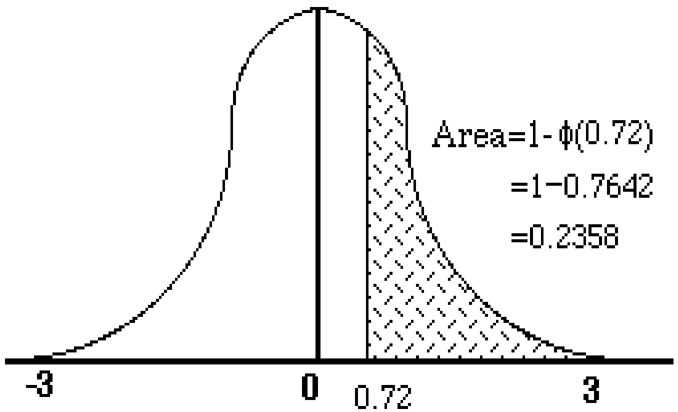
Esempio_3: calcolo dell'area tra -∞ e 1.25



Alcune tavole danno invece l'area compresa tra il valore dato e lo zero. Per ottenere l'intera area occorre sommare 0,5 che è l'area a sinistra dello zero

$$\phi(1.25) = 0.5 + 0.3944 = 0.8944$$

Esempio_4: calcolo dell'area a destra di 0.72

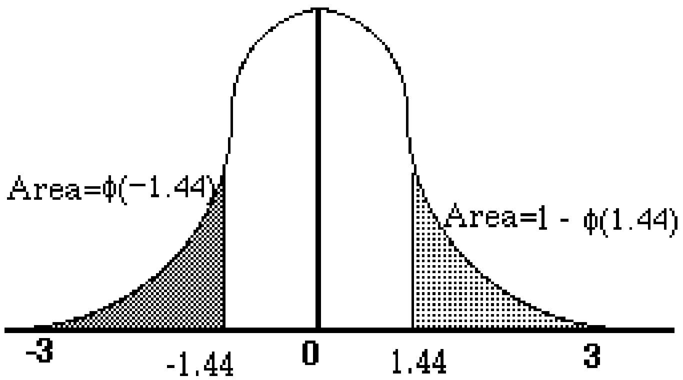


Poiché l'area totale è uguale a 1 si ha l'identità:

Area a sinistra = 1- Area a destra

$$1 - P(Z \leq 0.72)$$

Esempio_5: calcolo dell'area per valori negativi: $\phi(-1.44)$



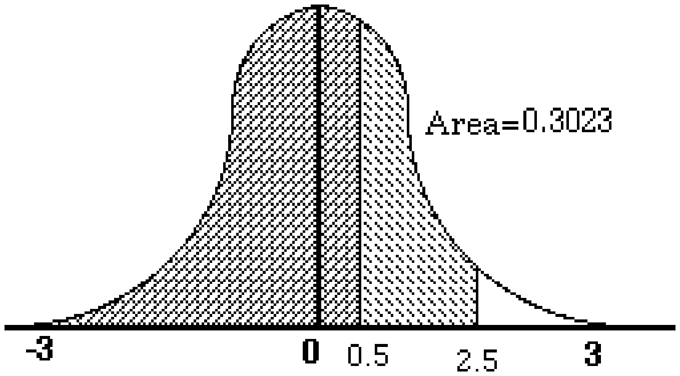
La curva normale è simmetrica per cui

$$\phi(-X) = 1 - \phi(X)$$

Per calcolare l'area a sinistra di un valore negativo si usa l'area a destra del valore positivo corrispondente:

$\phi(-1.44) = 1 - \phi(1.44) = 1 - 0.9251 = 0.0749$

Esempio_6: calcolo dell'area compresa tra due valori positivi.

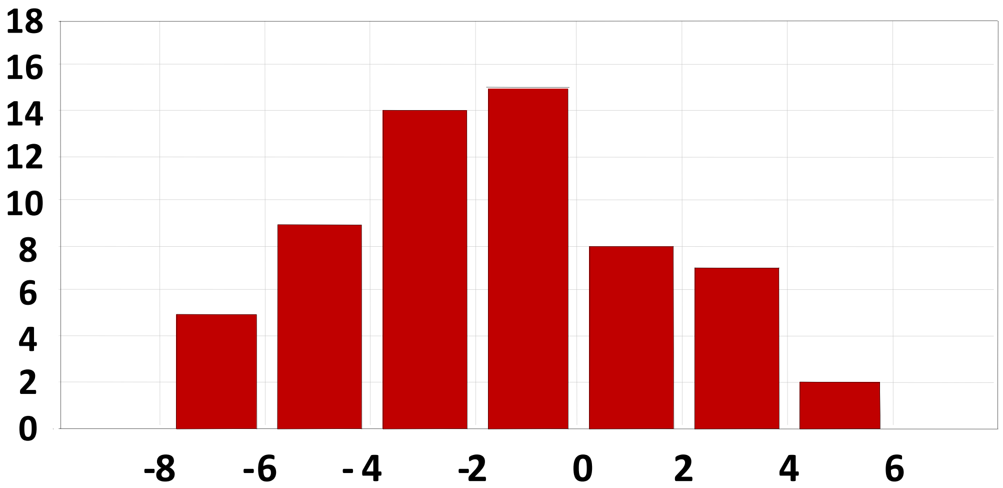


L'area compresa tra due valori qualsiasi si ottiene per differenza tra le aree a sinistra degli estremi dell'intervallo

Area$=\phi(2.5) - \phi(0.5) = 0.9938 - 0.6915 = 0.3023$

32 – Esempio

Si è rilevato l'errore (rispetto ad un valore prefissato) nel peso di un campione di 60 lotti



-7.2	-4.8	-1.7	-3.1	-0.7	1.6
-6.7	-4.8	-1.6	-3.1	-0.5	2.2
-6.7	-4.8	-1.5	-2.9	-0.1	2.3
-6.6	-4.6	-1.4	-2.8	0.3	3.4
-6.5	-3.8	-1.4	-2.7	0.3	3.4
-5.6	-3.7	-1.3	-2.7	0.6	3.5
-5.5	-3.6	-1.3	-2.2	0.8	3.5
-5.3	-3.5	-1.2	-2.2	1.3	3.6
-5.1	-3.5	-1.0	-1.9	1.5	4.2
-5.0	-3.3	-0.8	-1.8	1.5	5.5

Ipotizziamo che tali valori siano validi per tutti i possibili lotti

$$\mu = -1.683 \quad \sigma = 3.106$$

Scelto a caso un lotto, qual è la probabilità che l'errore nel peso sia compreso tra -0.5 e +0.5?

$$P(-0.5 \leq x \leq 0.5) = P\left(\frac{-0.5+1.683}{3.106} \leq z \leq \frac{0.5+1.683}{3.106}\right) = P(0.38 \leq z \leq 0.70)$$

$$= \Phi(0.7) - \Phi(0.38) = 0.758 - 0.648 = 0.11 \Rightarrow 11\%$$

La variabile casuale Normale e la sua distribuzione di probabilità rivestono un ruolo fondamentale nella Statistica

È stato ampiamente dimostrato come in numerosi casi reali, sotto date condizioni, sia possibile fare riferimento al modello normale per spiegare la distribuzione di probabilità del fenomeno oggetto di studio

Consideriamo un esperimento consistente nella ripetizione di un numero di prove infinitamente grande: l'insieme delle prove può essere visto come una successione di variabili casuali X_1, X_2, X_3, … tra loro indipendenti e con la stessa distribuzione di probabilità

Tutte le volte che è possibile interpretare un esperimento in termini di somma o media di un gran numero di cause indipendenti, nessuna delle quali prevalente sulle altre, è ragionevole pensare che il fenomeno studiato ha una distribuzione di probabilità di tipo normale

Tale risultato è formalizzato attraverso il cosiddetto Teorema del Limite Centrale

34 – Il Teorema del Limite Centrale

Ogni trasformazione lineare di una v.c. Normale è ancora una v.c. Normale

La somma di due v.c. Normali indipendenti è ancora una v.c. Normale con media e varianza pari, rispettivamente, alla somma delle medie e delle varianze

Teorema del limite centrale

Sia X_1, X_2, X_3, … una successione di v. casuali indipendenti e identicamente distribuite (*iid*), con media μ e varianza σ^2 finite. Posto

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

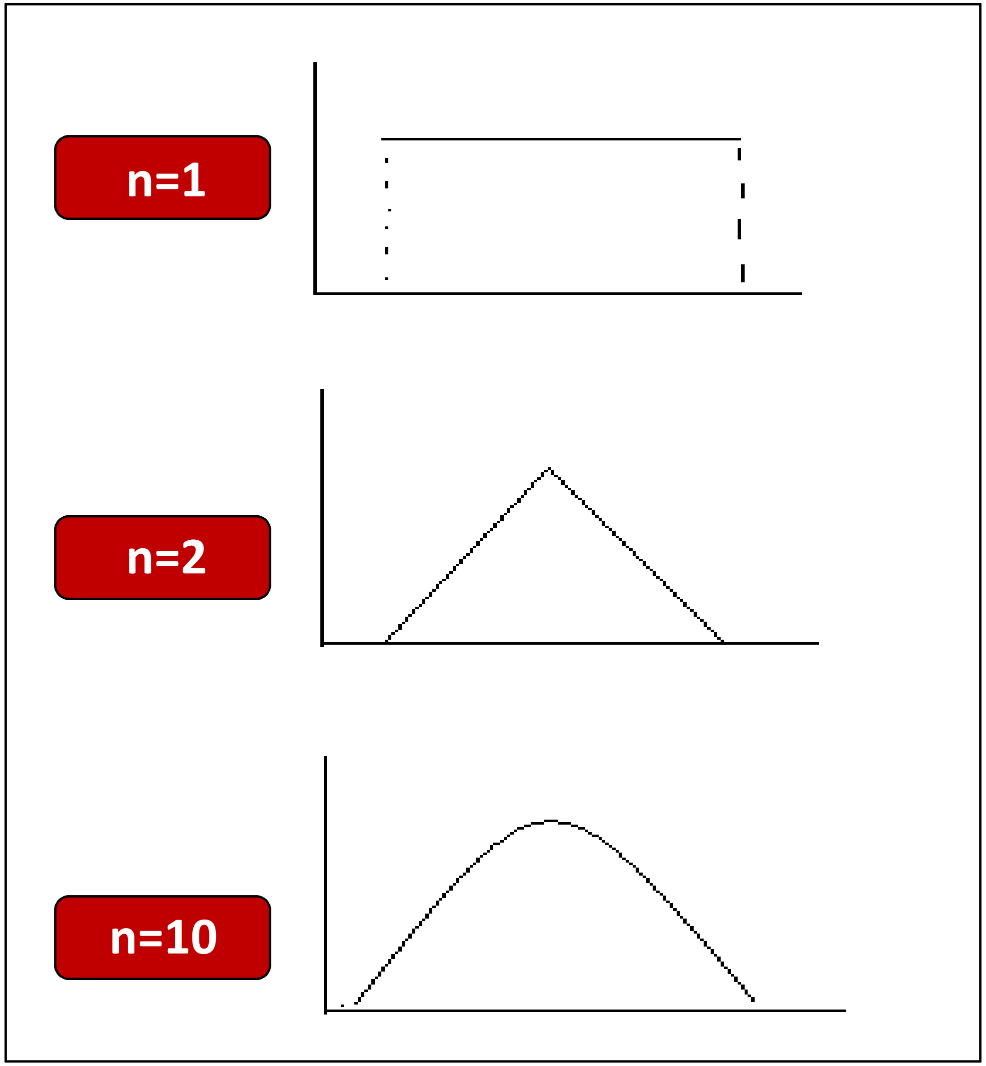
si dimostra che la v.c.

$$Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

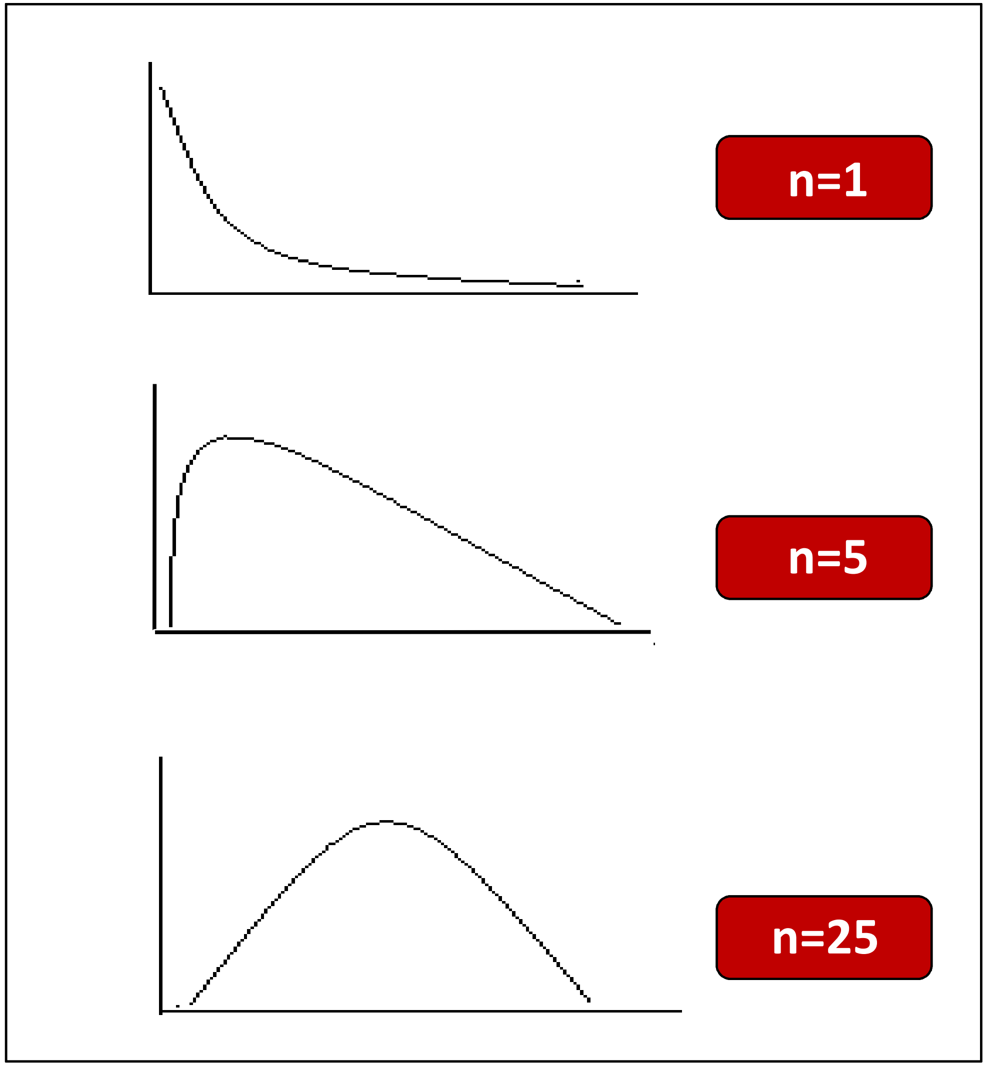
converge in distribuzione, per $n \rightarrow \infty$, alla v.c. Normale standardizzata

35 – Esempio

Media di n variabili casuali uniformi continue



Media di n variabili casuali esponenziali

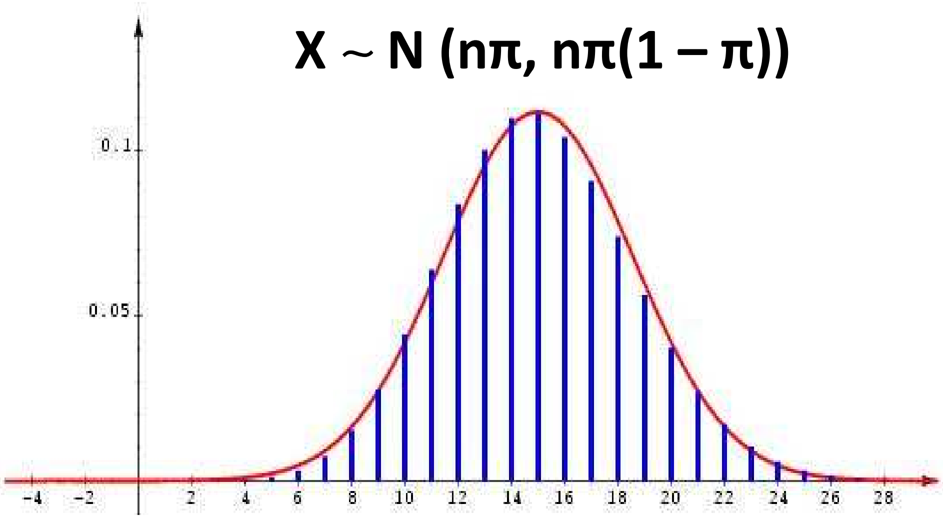


36 – Binomiale e Poisson

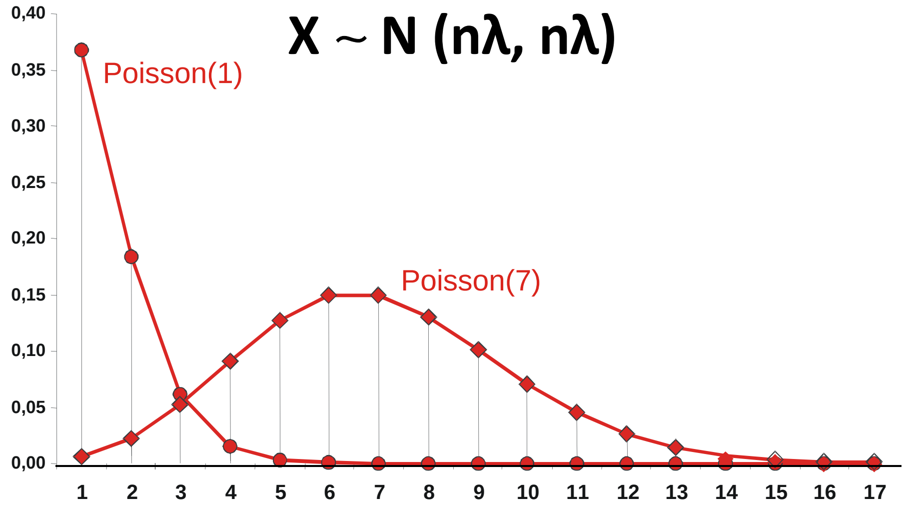
① *La v.c. Binomiale* può essere vista come la somma di n prove Bernoulliane indipendenti (cioè n v. casuali *iid*): dato un *n* sufficientemente grande la sua distribuzione è molto simile ad una v. casuale Normale con v. atteso $n\pi$ e varianza $n\pi(1 - \pi)$

② Consideriamo una successione di *Poisson* $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$, $X_3 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, ... con $\lambda_i > 0$: se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots$ si ha che la distribuzione X_n può essere approssimata, per *n* grande, da una v. casuale Normale con valore atteso $n\lambda$ e varianza $n\lambda$

$X \sim N(n\pi, n\pi(1 - \pi))$



$X \sim N(n\lambda, n\lambda)$

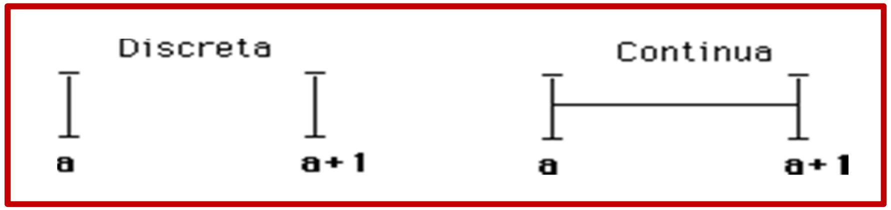


37 – Approssimazioni dal discreto al continuo

In alcuni casi, nonostante l'apparente contraddizione, è possibile approssimare distribuzioni di probabilità discrete alla distribuzione normale: occorre però tenere conto che i valori possibili delle discrete sono assimilabili ad un insieme di numeri interi naturali (0, ..., n, ...) mentre per la Gaussiana si ha che $x \in R$

Nel discreto si ha $P(X \leq a) + P(X \geq a+1) = 1$

Nel continuo $P(X \leq a) + P(X \geq a+1) \leq 1$



in quanto non sono inclusi i valori dell'intervallo $a < X < a+1$

Per superare tali problemi si usa un *fattore di correzione della continuità* pari a 0,5 : se X è una v. discreta ed è approssimata con una v. continua Y

$$P(a < X < b) = P(a + 0{,}5 \leq Y \leq b - 0{,}5)$$

Se gli estremi sono esclusi si restringe l'intervallo]a;b[

$$P(a \leq X \leq b) = P(a - 0{,}5 \leq Y \leq b + 0{,}5)$$

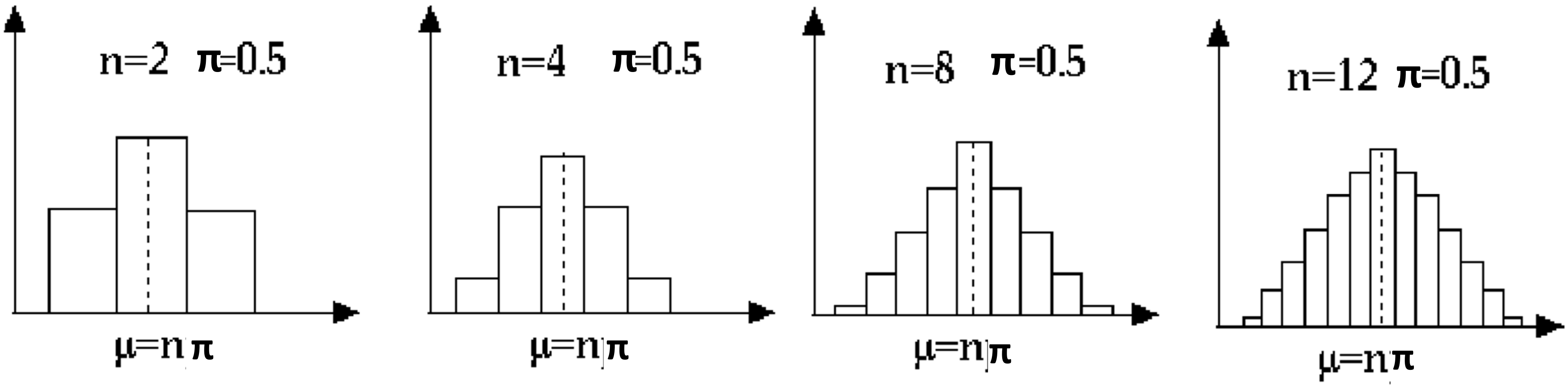
Se gli estremi sono inclusi si allarga l'intervallo [a;b]

38 – Dalla Binomiale alla Normale

La Normale è una buona approssimazione della Binomiale se:

① **n, il numero delle prove, è molto grande**

② **π, la probabilità di successo, è molto vicino a 0.5**



All'aumentare di n la distribuzione assume una forma sempre più campanulare giustificando l'uso di una distribuzione normale

Per calcolare la probabilità che la X assuma valori in un certo intervallo, una volta calcolati il valore atteso e la varianza, si utilizzano le tavole della v.c. Normale

39 – Esempio

Le nuove imprese hanno il 50% di probabilità di fallire nel loro primo anno di attività. Qual è la probabilità che in un campione di 100 imprese 40 siano ancora in attività dopo il 1° esercizio?

$$P(X=40) = \binom{100}{40} 0,5^{40} 0,5^{60} = \frac{100!}{40!60!} \cdot 0,5^{40} 0,5^{60} = 0,0108$$

Proviamo a calcolare la probabilità utilizzando l'approssimazione alla normale

$$\mu = n\pi = 100 \cdot 0,5 = 50 \qquad \sigma^2 = n\pi(1-\pi) = 25$$

$$P(X = 40) \cong P(39,5 \leq Y \leq 40,5) =$$

$$= P(-2,1 \leq Z \leq -1,9) \rightarrow P(1,9 \leq Z \leq 2,1) = \phi(2,1) - \phi(1,9) =$$

$$= 0,9821 - 0,9713 = 0,0108 \longrightarrow \text{PERCHE'??}$$

40 – Esempio

Il 20% degli individui è convinto di sopravvivere ad un incidente aereo Si indichi con X il n° di tali persone in un campione di ampiezza n = 25: qual è la probabilità che il numero di individui convinti di sopravvivere sia compreso tra 6 e 9?

$$\mu = n\pi = 25 \cdot 0{,}2 = 5 \qquad \sigma^2 = n\pi(1-\pi) = 4$$

$$P(6 \le X \le 9) = \sum_{i=0}^{9}\binom{25}{i}0{,}2^i 0{,}8^{25-i} - \sum_{i=0}^{6}\binom{25}{i}0{,}2^i 0{,}8^{25-i} = 0{,}3659$$

Per approssimazione

$$P(6 \le X \le 9) = P(5{,}5 \le Y \le 9{,}5) = P\left(\frac{5{,}5-5}{2} \le \frac{Y-5}{2} \le \frac{9{,}5-5}{2}\right) =$$

$$= P(0{,}25 \le Z \le 2{,}25) = \phi(2{,}25) - \phi(0{,}25) = 0{,}3891$$

Perché???

La distribuzione Poissoniana è approssimabile alla distribuzione normale con $\mu = \lambda$ e $\sigma^2 = \lambda$, sotto la condizione che $\lambda \geq 10$

Esempio

Il n° di vendite settimanali di un certo prodotto segue la legge Poissoniana con una media di 2 vendite al giorno. Qual è la probabilità che in una settimana si vendano al più 23 prodotti?

Se consideriamo una media di 2 vendite al giorno avremo 14 prodotti in una settimana:

$$P(X \leq 23) = \sum_{k=0}^{23} \frac{14^k e^{-14}}{k!} = 0{,}9907$$

Approssimando la distribuzione alla Normale otteniamo

$$P(0 \leq X \leq 23) = P\left(\frac{0 - 0{,}5 - 14}{3{,}7417} \leq Z \leq \frac{23 + 0{,}5 - 14}{3{,}7417} \right) =$$

$$= P(-3{,}88 \leq Z \leq 2{,}54) = \phi(2{,}54) - \left[1 - \phi(3{,}88)\right] = 0{,}9944$$