Probabilità condizionate e Teorema di Bayes — Esercitazione n° 06

ESERCIZIO 1

Dati due eventi indipendenti A e B, calcolare $P(A)$, $P(A \cap B)$ e $P(A|B)$, sapendo che $P(B)=0,4$ e $P(A \cup B)=0,7$.

SOLUZIONE

a) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)$$
$$0,7=P(A)+0,4-P(A)\cdot 0,4$$
$$0,7-0,4=P(A)\cdot[1-0,4]$$
$$P(A)=\frac{0,3}{0,6}=0,5$$

b) $P(A \cap B)=P(A)\cdot P(B)=0,5\cdot 0,4=0,2$

c) $P(A|B)=\dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}=\dfrac{0,2}{0,4}=0,5$

ESERCIZIO 2

Si consideri un'urna contente 10 palline bianche, 6 palline rosse e 8 palline nere, dalla quale si estraggono a caso due palline. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi, sia nel caso di estrazioni con ripetizione sia nel caso di estrazioni senza ripetizione:

a) le palline estratte sono entrambe bianche
b) le palline estratte sono una bianca ed una rossa
c) le due palline estratte non sono nere
d) almeno una delle due palline è bianca.

SOLUZIONE

a) A = {le palline estratte sono entrambe bianche}

$$P(A)=P(B_1 \cap B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2)=\frac{10}{24}\cdot\frac{10}{24}=0,1736$$
$$P(A)=P(B_1 \cap B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2|B_1)=\frac{10}{24}\cdot\frac{9}{23}=0,1630$$

b) B = {le palline estratte sono una bianca ed una rossa}

$$P(B)=P[(B_1 \cap R_2)\cup(R_1 \cap B_2)]=P(B_1 \cap R_2)+P(R_1 \cap B_2)=$$
$$P(B_1)P(R_2)+P(R_1)P(B_2)=\frac{10}{24}\frac{6}{24}+\frac{6}{24}\frac{10}{24}=0,2083$$

$$P(B)=P[(B_1 \cap R_2)\cup(R_1 \cap B_2)]=P(B_1 \cap R_2)+P(R_1 \cap B_2)=$$
$$P(B_1)P(R_2|B_1)+P(R_1)P(B_2|R_1)=\frac{10}{24}\frac{6}{23}+\frac{6}{24}\frac{10}{23}=0,2174$$

c) C = {le due palline estratte non sono nere}

$$P(C)=P(\overline{N}_1\cap\overline{N}_2)=P(\overline{N}_1)P(\overline{N}_2)=[1-P(N_1)][1-P(N_2)]=\left(1-\frac{8}{24}\right)\left(1-\frac{8}{24}\right)=0{,}4444$$

$$P(C)=P(\overline{N}_1\cap\overline{N}_2)=P(\overline{N}_1)P(\overline{N}_2|\overline{N}_1)=\frac{16}{24}\frac{15}{23}=0{,}4348$$

d) D = {almeno una delle due palline è bianca}

$$P(D)=P[(B_1\cap\overline{B}_2)\cup(\overline{B}_1\cap B_2)\cup(B_1\cup B_2)]=P(B_1\cap\overline{B}_2)+P(\overline{B}_1\cap B_2)+P(B_1\cap B_2)=$$
$$=P(B_1)P(\overline{B}_2)+P(\overline{B}_1)P(B_2)+P(B_1)P(B_2)=P(B_1)[1-P(B_2)]+[1-P(B_1)]P(B_2)+P(B_1)P(B_2)=$$
$$=\frac{10}{24}\left(1-\frac{10}{24}\right)+\frac{10}{24}\left(1-\frac{10}{24}\right)+\frac{10}{24}\frac{10}{24}=0{,}6597$$

$$P(D)=P[(B_1\cap\overline{B}_2)\cup(\overline{B}_1\cap B_2)\cup(B_1\cup B_2)]=P(B_1\cap\overline{B}_2)+P(\overline{B}_1\cap B_2)+P(B_1\cap B_2)=$$
$$=P(B_1)P(\overline{B}_2|B_1)+P(\overline{B}_1)P(B_2|\overline{B}_1)+P(B_1)P(B_2|B_1)=\frac{10}{24}\frac{14}{23}+\frac{14}{24}\frac{10}{23}+\frac{10}{24}\frac{9}{23}=0{,}6703$$

ESERCIZIO 3

Date tre urne:

U_1 che contiene 12 palline rosse e 8 palline verdi

U_2 che contiene 10 palline rosse e 15 palline verdi

U_3 che contiene 9 palline rosse e 6 palline verdi

Si lancia un dado e se viene un numero non superiore a 3 si estrae una pallina dalla prima urna, se esce un numero superiore a 4 si estrae una pallina dalla seconda urna e se esce il numero 4 si estrae una pallina dalla terza urna. Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia rossa.

SOLUZIONE

$H_1=$ {si sceglie U_1 se nel lancio compare un numero ≤ 3}

$H_2=$ {si sceglie U_2 se nel lancio compare un numero >4}

$H_3=$ {si sceglie U_3 se nel lancio compare il numero 4}

R = {si estrae una pallina rossa}

$$P(A)=P\left[(H_1\cap R)\cup(H_2\cap R)\cup(H_3\cap R)\right]=P(H_1\cap R)+P(H_2\cap R)+P(H_3\cap R)=$$
$$P(H_1)P(R|H_1)+P(H_2)P(R|H_2)+P(H_3)P(R|H_3)=\frac{3}{6}\frac{12}{20}+\frac{2}{6}\frac{10}{25}+\frac{1}{6}\frac{9}{15}=\frac{8}{15}=0{,}5333$$

ESERCIZIO 4

Dati due eventi A e B tali che $P(A)=3/5$, $P(B)=1/2$, $P(B|A)=1/5$, calcolare:

a) $P(A\cap B)$ b) $P(A\cup B)$

c) inoltre dato un altro evento C, con A e C sono indipendenti, e $P(A\cap C)=6/25$, $P(B\cup C)=9/10$, mostrare che B e C sono mutuamente esclusivi (incompatibili).

a) $P(A\cap B)=P(B\,|\,A)P(A)=\frac{1}{5}\frac{3}{5}=\frac{3}{25}$

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{25} = \frac{49}{50}$

c) $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ $\qquad \frac{6}{25} = \frac{3}{5} \cdot P(C)$ $\qquad P(C) = \frac{6}{25}\frac{5}{3} = \frac{2}{5}$

$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - 0 = \frac{9}{10}$

ESERCIZIO 5

Dati due eventi A e B tali che $P(A) = 0,4$, $P(A \cup B) = 0,85$, $P(B) = p$. Calcolare il valore che deve necessariamente assumere p affinché A e B siano indipendenti.

SOLUZIONE

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,4 \cdot p$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + p - 0,85 = p - 0,45$

$p - 0,45 = 0,4 \cdot p$

$p \cdot [1 - 0,4] = 0,45$

$p = 0,75$

ESERCIZIO 6

Due stabilimenti S_1 e S_2 producono rispettivamente il 60% e il 40% del numero di pezzi complessivamente prodotti da un'impresa. Inoltre, siano pari al 3% e al 7% le percentuali dei pezzi difettosi rispettivamente prodotti dai due stabilimenti, determinare la probabilità che estratto un pezzo a caso esso sia difettoso.

SOLUZIONE

$H_i = \{$il pezzo scelto a caso proviene dallo stabilimento i$\}$ $\quad D = \{$il pezzo scelto a caso è difettoso$\}$

$D | H_i = \{$il pezzo scelto è difettoso supposto che esso provenga dallo stabilimento i$\}$

$P(H_1) = 0,6 \qquad P(H_2) = 0,4 \qquad P(D | H_1) = 0,03 \qquad P(D | H_2) = 0,07$

$$P(D) = P[(H_1 \cap D) \cup (H_2 \cap D)] = P(H_1 \cap D) + P(H_2 \cap D) = P(H_1)P(D | H_1) + P(H_2)P(D | H_2) =$$
$$= 0,6 \cdot 0,03 + 0,4 \cdot 0,07 = 0,018 + 0,028 = 0,046$$

ESERCIZIO 7

Una ditta vuole verificare l'efficacia di una campagna pubblicitaria per un suo nuovo prodotto. Per ognuno dei prodotti venduti si chiede all'acquirente se ha effettuato l'acquisto dopo aver visto un annuncio pubblicitario oppure autonomamente. Da un'indagine precedente è noto che la probabilità che il potenziale acquirente abbia visto l'annuncio è 0,8, che la probabilità che la vendita si realizzi con successo posto che l'individuo abbia visto la pubblicità è 0,7 e che invece è 0,5 la probabilità che abbia effettuato autonomamente l'acquisto. Calcolare la probabilità che, scelto un acquirente a caso, esso effettui l'acquisto.

SOLUZIONE

$A = \{$l'acquirente ha visto l'annuncio pubblicitario$\}$ $E = \{$l'acquirente effettua l'acquisto$\}$

$E \mid A = \{$l'acquirente effettua l'acquisto avendo visto l'annuncio$\}$

$E \mid \overline{A} = \{$l'acquirente effettua l'acquisto non avendo visto l'annuncio$\}$

$P(A) = 0,8 \qquad P(\overline{A}) = 0,2 \qquad P(E \mid A) = 0,7 \qquad P(E \mid \overline{A}) = 0,5$

$P(E) = P(E \cap A) + P(E \cap \overline{A}) = P(A) \cdot P(E \mid A) + P(\overline{A}) \cdot P(E \mid \overline{A}) = 0,8 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,5 = 0,81$

ESERCIZIO 8

Una popolazione è costituita da 40.000 uomini e 60.000 donne. Si supponga che il 6% degli uomini e il 15% delle donne voti per una determinata coalizione politica. Si estrae a caso dalla popolazione una persona che dichiara di aver votato per la suddetta coalizione. Determinare la probabilità che la persona estratta sia uomo.

SOLUZIONE

$H_1 = \{$la persona estratta è un uomo$\}$

$H_2 = \{$la persona estratta è una donna$\}$

$E = \{$la persona estratta ha votato per la coalizione$\}$

$$P(H_1) = \frac{40000}{100000} = 0,4 \qquad P(H_2) = \frac{60000}{100000} = 0,6$$

$$P(E \mid H_1) = 0,06 \qquad P(E \mid H_2) = 0,15$$

$$P(H_1 | E) = \frac{P(H_1) \cdot P(E|H_1)}{P(H_1) \cdot P(E|H_1) + P(H_2) \cdot P(E|H_2)} = \frac{\frac{40000}{100000} \cdot 0,06}{\frac{40000}{100000} \cdot 0,06 + \frac{60000}{100000} \cdot 0,15} = \frac{0,024}{0,024 + 0,09} = \frac{0,024}{0,114} = 0,21$$

ESERCIZIO 9

In una sessione di esami di matematica il 45% degli esaminati sono uomini ed il 55% sono donne. Il 30% delle donne ed il 25% degli uomini hanno superato brillantemente l'esame (con un voto maggiore di 27). Calcolare la probabilità che, selezionato a caso uno studente che ha superato brillantemente l'esame, questi sia una donna.

SOLUZIONE

$D = \{$lo studente è donna$\}$

$U = \{$lo studente è uomo$\}$

$B = \{$lo studente ha superato brillantemente l'esame$\}$

$P(D) = 0,55 \qquad P(U) = 0,45 \qquad P(B \mid D) = 0,3 \qquad P(B \mid U) = 0,25$

$$P(D|B) = \frac{P(D) \cdot P(B|D)}{P(D) \cdot P(B|D) + P(U) \cdot P(B|U)} = \frac{0,55 \cdot 0,30}{0,55 \cdot 0,30 + 0,45 \cdot 0,25} = \frac{0,1650}{0,2775} = 0,5946$$